TYPES MODULO ℓ POUR LES FORMES INTÉRIEURES DE GL_n SUR UN CORPS LOCAL NON ARCHIMÉDIEN

par

Alberto Mínguez & Vincent Sécherre

Abstract. — Let F be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic p, let D be a finite dimensional central division F-algebra and let ℓ be a prime number different from p. We develop a theory of ℓ-modular types for the group $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, $m \geqslant 1$, in preparation of the study of the ℓ-modular smooth representations of this group.

Introduction

1. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F dont le degré réduit est noté d. Pour $m \geqslant 1$, on pose $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, qui est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_{md}(\mathrm{F})$. La théorie des types complexes pour G a été développée dans une série d'articles [**24, 25, 26, 28, 4, 29**] à la suite des travaux de Bushnell et Kutzko [**8, 10**] pour $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, $n \geqslant 1$. C'est un outil puissant, qui permet une description explicite de la catégorie des représentations lisses complexes de G. Dans cet article, on développe une théorie des types modulaires pour G, dans l'objectif d'étudier les représentations lisses modulaires de G, c'est-à-dire à coefficients dans un corps R algébriquement clos de caractéristique ℓ non nulle et différente de p (voir [**21, 22**]).

2. La théorie des représentations modulaires des groupes réductifs p-adiques a été développée par Vignéras [**31, 32**]. Comparée à la théorie complexe, elle présente de grandes similarités mais aussi des différences importantes, à la fois dans les résultats et dans les méthodes. Les représentations modulaires d'un sous-groupe ouvert compact ne sont pas semi-simples en général. Le fait que ℓ soit différent de p équivaut à l'existence d'une mesure de Haar à valeurs dans R sur le groupe, mais la mesure d'un sous-groupe ouvert compact peut être nulle. Il faut distinguer entre les deux notions de représentation irréductible cuspidale (c'est-à-dire dont tous les modules de Jacquet relativement à un sous-groupe parabolique propre sont nuls) et supercuspidale (c'est-à-dire qui n'est sous-quotient d'aucune induite parabolique d'une représentation d'un sous-groupe de Levi propre). On a une notion de support supercuspidal pour une représentation irréductible, mais on ignore en général s'il est unique. Il n'existe pas de version modulaire de la formule des

Ce travail a bénéficié de financements de l'EPSRC (GR/T21714/01, EP/G001480/1) et de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-08-BLAN-0259-01, ANR-10-BLANC-0114). Le premier auteur est aussi financé en partie par MTM2010-19298 et FEDER.

traces ni du théorème de Paley-Wiener. Il y a des représentations irréductibles non isomorphes d'un même groupe dont tous les modules de Jacquet propres sont isomorphes.

3. L'un des principaux outils dont on dispose pour étudier les représentations modulaires d'un groupe réductif p-adique est la théorie des types, pour les groupes pour lesquels une telle théorie existe. Une théorie des types modulaires a été développée pour le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ (voir [**31, 32**]) et l'objet du présent article est de produire une théorie analogue pour ses formes intérieures. On l'utilise dans [**21**] pour construire une classification à la Zelevinski des représentations modulaires irréductibles de G en termes de multisegments et dans [**22**] pour construire une classification des représentations banales de G. Dans un travail en cours de Sécherre et S. Stevens, elle est utilisée pour obtenir une décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses modulaires de G.

4. Notre première tâche est de généraliser au cas modulaire la construction des types simples et semi-simples de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ et de ses formes intérieures. Pour cela, nous reprenons les arguments de la théorie complexe en expliquant comment les adapter au cas modulaire. Nous produisons donc, dans un premier temps, une famille de paires (J, λ), composées d'un sous-groupe ouvert compact de G et d'une représentation lisse irréductible λ de J et possédant les propriétés suivantes :

(1) pour toute représentation irréductible cuspidale ρ de G, il existe une paire (J, λ), unique à conjugaison près, telle que la restriction de ρ à J admette une sous-représentation isomorphe à λ ;

(2) deux représentations irréductibles cuspidales de G contiennent une même paire (J, λ) si et seulement si elles sont inertiellement équivalentes.

De telles paires sont appelées des types simples maximaux pour G. Elles permettent de décrire les représentations irréductibles cuspidales comme induites compactes de représentations irréductibles de sous-groupes ouverts compacts modulo le centre (voir le théorème 3.11).

Théorème A. — *Soient ρ une représentation irréductible cuspidale de* G *et* (J, λ) *un type simple maximal contenu dans ρ. Il existe une unique représentation du* G*-normalisateur de* J *qui prolonge λ et dont l'induite à* G *soit isomorphe à ρ.*

Ceci permet d'étudier la réduction modulo ℓ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales entières (§§3.5-3.6) et fournit les premiers résultats qui diffèrent du cas déployé : voir les théorèmes 3.15, 3.26 et la proposition 3.22, que l'on comparera à [**31**], théorèmes III.1.1 et III.5.10.

Théorème B. — (1) *Il y a des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales entières dont la réduction modulo ℓ n'est pas irréductible.*

(2) *Il y a des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales n'admettant pas de relèvement à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.*

(3) *Toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible supercuspidale se relève à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.*

Il s'agit ensuite, étant donné pour chaque entier $i = 1, \dots, r$ un type simple maximal $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$ de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})$, de produire une paire couvrante de la représentation $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r$ de $\mathrm{J}_1 \times \cdots \times \mathrm{J}_r$, c'est-à-dire une paire composée d'un sous-groupe ouvert compact K de G avec $m_1 + \cdots + m_r = m$ et d'une représentation lisse irréductible τ de K gouvernant les représentations irréductibles de G dont le support cuspidal est de la forme $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$, où ρ_i est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})$ contenant le type simple maximal $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$. De telles paires couvrantes sont appelées des types semi-simples pour G et leur construction fait l'objet de la fin de la section 2.

5. La théorie des types de Bushnell et Kutzko permet de comparer la théorie des représentations lisses de G à celle de certaines algèbres de Hecke affines. Dans le cas modulaire, cette comparaison n'est pas aussi parfaite que dans le cas complexe (on n'a pas en général d'équivalences de catégories décrivant les blocs de la catégorie des représentations lisses de G comme dans [**10, 29**]) mais elle reste efficace dans l'étude des représentations irréductibles de G grâce à la propriété de presque-projectivité introduite par Dipper [**14**] et développée par Vignéras et Arabia [**32, 33**]. Un problème important est la comparaison entre induites paraboliques et modules induits. On donne au paragraphe 4.2 des conditions pour qu'une induite parabolique soit irréductible. Un corollaire est le théorème 4.18 permettant de ramener le problème de la classification de toutes les représentations irréductibles de G à celui des représentations irréductibles ayant un support cuspidal inertiellement équivalent à $\rho\otimes\cdots\otimes\rho$, où ρ est une représentation irréductible cuspidale fixée. On a enfin le théorème de comparaison 4.20, qui permet d'associer à toute représentation irréductible cuspidale ρ de G un caractère non ramifié ν_ρ de ce groupe possédant la propriété suivante (voir la proposition 4.37).

Théorème C. — *Si ρ' est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathrm{D})$, $m'\geqslant 1$, alors l'induite normalisée de $\rho\otimes\rho'$ est réductible si et seulement si $m'=m$ et ρ' est isomorphe à $\rho\nu_\rho$ ou à $\rho\nu_\rho^{-1}$.*

6. Si l'on essaie d'étendre à G les techniques employées dans [**31, 32**] pour le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, on est confronté au fait que les représentations irréductibles cuspidales de G n'ont pas de modèle de Whittaker et qu'il n'y a pas de théorie des dérivées pour les représentations irréductibles de G, dont l'usage est crucial dans [**32**]. C'est la raison pour laquelle on introduit un outil technique important, qui permet de faire un lien entre représentations de G et représentations des groupes linéaires GL sur une extension finie du corps résiduel de F. Le point de départ est un processus associant à toute représentation irréductible cuspidale ρ de G un objet $\boldsymbol{\Theta}(\rho)$ appelé *endo-classe*. Il est décrit dans [**4**] pour les représentations complexes et fonctionne de façon similaire pour les représentations modulaires. On en trouve dans [**7**] une interprétation arithmétique dans le cas où R est le corps des nombres complexes et où D = F est de caractéristique nulle. Si ρ est une représentation irréductible cuspidale de G, on peut lui attacher un entier $f\geqslant 1$, une extension finie $\mathfrak{k}$ du corps résiduel de F et un foncteur $\mathbf{K}$ de la catégorie des représentations lisses de G dans la catégorie des représentations du groupe fini $\mathrm{GL}_f(\mathfrak{k})$ possédant les propriétés suivantes :

(1) il est exact ;

(2) il envoie représentations admissibles sur représentations de dimension finie et représentations cuspidales sur représentations cuspidales (ou nulles) ;

(3) il annule les représentations irréductibles de G – *et uniquement celles-là* – dont le support cuspidal est de la forme $\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r$ avec $\boldsymbol{\Theta}(\rho_i)\neq\boldsymbol{\Theta}(\rho)$ pour au moins un i.

Par exemple, si ρ est de niveau 0, on a $f=m$ et $\mathfrak{k}$ est le corps résiduel de D, et $\mathbf{K}$ est le foncteur associant à toute représentation de G la représentation de $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{k})$ sur l'espace de ses invariants sous le radical pro-unipotent du sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$.

La propriété de non-annulation (3) joue un rôle essentiel : voir le paragraphe 5.2, notamment la proposition 5.11 et le lemme 5.7. On notera que la preuve de ce lemme repose sur un résultat profond de théorie des types complexes établi dans [**29**].

Ces foncteurs sont largement utilisés dans [**21**] pour prouver l'unicité du support supercuspidal d'une représentation irréductible et définir la notion de représentation résiduellement non dégénérée de G, qui généralise celle de représentation non dégénérée et est à la base de notre classification des représentations irréductibles de G en termes de multisegments.

7. Terminons cette introduction en décrivant brièvement le travail effectué dans chaque section. Dans la section 2, on définit des représentations irréductibles de certains sous-groupes ouverts compacts de G, appelées types simples (§2.5) et semi-simples (§2.7).

Dans la section 3, on classe les représentations irréductibles cuspidales de G en termes de types simples maximaux (théorème 3.4). Ceci permet d'associer certains invariants aux représentations irréductibles cuspidales de G (§3.4) et d'étudier le problème de leur réduction mod ℓ (§3.5) et de leur relèvement (§3.6).

La section 4 est consacrée à l'étude des liens entre les représentations lisses de G et les modules sur certaines algèbres de Hecke affines. On introduit la notion de représentation quasi-projective (§4.1) et on donne des conditions pour qu'une induite parabolique soit irréductible. Un corollaire est l'important théorème 4.18 permettant de ramener le problème de la classification de toutes les représentations irréductibles de G à celui des représentations irréductibles ayant un support cuspidal inertiellement équivalent à $\rho\otimes\cdots\otimes\rho$, où ρ est une représentation irréductible cuspidale fixée.

Dans la section 5, on définit les foncteurs **K** discutés plus haut et on étudie leurs propriétés. On obtient en particulier les proposition importantes 5.12 et 5.18 établissant la compatibilité de ces foncteurs à l'induction et à la restriction parabolique.

Remerciements

Nous remercions Jean-François Dat, Guy Henniart, Shaun Stevens et Marie-France Vignéras pour de nombreuses discussions à propos de ce travail.

Une partie de ce travail a été réalisée lors du séjour des auteurs à l'Erwin Schrödinger Institute en janvier-février 2009 et du second auteur à l'Institut Henri Poincaré de janvier à mars 2010 ; que ces deux institutions soient remerciées pour leur accueil et leur soutien financier. Une autre partie en a été réalisée lors de plusieurs séjours à l'University of East Anglia : nous remercions celle-ci pour son accueil et Shaun Stevens pour ses nombreuses invitations.

Alberto Mínguez remercie le CNRS pour les six mois de délégation dont il a bénéficié en 2011.

Vincent Sécherre remercie l'Université de la Méditerranée et l'Institut de Mathématiques de Luminy, où il était en poste durant la majeure partie de ce travail.

Notations et conventions

1. *Dans tout cet article*, F est un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle notée p et R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

2. Toutes les F-algèbres sont supposées unitaires et de dimension finie. Par F-*algèbre à division* on entend F-algèbre centrale dont l'anneau sous-jacent est un corps, pas nécessairement commutatif. Si K est une extension finie de F, ou une algèbre à division sur une extension finie de F, on note $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_{\mathrm{K}}$ son idéal maximal, $\mathfrak{k}_{\mathrm{K}}$ son corps résiduel et q_{K} le cardinal de $\mathfrak{k}_{\mathrm{K}}$. En particulier, on pose $q = q_{\mathrm{F}}$ une fois pour toutes.

3. Une R-*représentation lisse* d'un groupe topologique G est la donnée d'un R-espace vectoriel V et d'un homomorphisme de G dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{R}}(\mathrm{V})$ tel que le stabilisateur dans G de tout vecteur de V soit ouvert. *Dans cet article, toutes les représentations sont des* R-*représentations lisses.*

Un R-*caractère* de G est un homomorphisme de G dans $\mathrm{R}^\times$ de noyau ouvert. Si π est une R-représentation de G et χ un R-caractère de G, on note $\chi\pi$ ou $\pi\chi$ la représentation $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$.

Si aucune ambiguïté n'est à craindre, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que R-caractère et R-représentation.

1. Préliminaires

1.1. On fixe une F-algèbre à division D de degré réduit noté d. Pour $m \geqslant 1$, on note $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ la F-algèbre des matrices de taille $m \times m$ à coefficients dans D, et on pose $\mathrm{G}_m = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$.

1.2. Soit $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$ pour $m \geqslant 1$. On désigne par $\mathscr{R}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ la catégorie abélienne des représentations de G (qui sont lisses et à coefficients dans R), par $\mathrm{Irr}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de G et par $\mathscr{G}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de G. Ce dernier est un $\mathbb{Z}$-module libre de base $\mathrm{Irr}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ canoniquement muni d'une relation d'ordre partiel notée $\leqslant$.

Si σ est une représentation de longueur finie de G, on note $[\sigma]$ son image dans $\mathscr{G}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$. Si σ est irréductible, $[\sigma]$ désigne donc sa classe d'isomorphisme. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, il nous arrivera d'identifier une représentation avec sa classe d'isomorphisme.

1.3. *On fixe une fois pour toutes une racine carrée de q dans* R. Si $\mathrm{P} = \mathrm{MU}$ est un sous-groupe parabolique de G muni d'une décomposition de Levi, on note $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ le foncteur de restriction parabolique normalisé de $\mathscr{R}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ dans $\mathscr{R}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})$ et $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ son adjoint à droite, c'est-à-dire le foncteur d'induction parabolique normalisé lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts et ils préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie (voir [**31**, II], paragraphes 2.1, 3.8, 5.13). Soit P^- le sous-groupe parabolique de G opposé à P relativement à M.

Proposition 1.1. — *Si π et σ sont des représentations admissibles de* G *et de* M *respectivement, on a un isomorphisme de* R*-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^{\mathrm{G}}(\sigma), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\sigma, \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi)) \tag{1.1}$$

dit de seconde adjonction (voir [**31**, II.3.8]*).*

Si $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ est une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme m, il lui correspond le sous-groupe de Levi standard M_α de G_m constitué des matrices diagonales par blocs de tailles $m_1, \dots, m_r$ respectivement, que l'on identifie naturellement à $\mathrm{G}_{m_1} \times \cdots \times \mathrm{G}_{m_r}$. On note P_α le sous-groupe parabolique de G_m de facteur de Levi M_α formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $m_1, \dots, m_r$ respectivement, et on note U_α son radical unipotent. Les foncteurs $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}_\alpha}^{\mathrm{G}_m}$ et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}_\alpha}^{\mathrm{G}_m}$ sont simplement notés respectivement $\boldsymbol{i}_\alpha$ et $\boldsymbol{r}_\alpha$. Si, pour chaque entier $i \in \{1, \dots, r\}$, on a une représentation π_i de G_{m_i}, on pose :

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r = \boldsymbol{i}_\alpha(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r). \tag{1.2}$$

1.4. Une représentation irréductible de G est *cuspidale* si son image par $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ est nulle pour tout sous-groupe parabolique propre P de G, c'est-à-dire si elle n'est isomorphe à aucun quotient (ou, de façon équivalente, à aucune sous-représentation) d'une induite parabolique propre. Elle est *supercuspidale* si elle n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une induite parabolique propre.

Étant donné une représentation irréductible π de G, il existe une famille $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ d'entiers $\geqslant 1$ de somme m, et, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe une représentation irréductible cuspidale ρ_i de G_{m_i}, de telle sorte que π soit un quotient de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$. On note :

$$\mathrm{cusp}(\pi) \tag{1.3}$$

la somme formelle $[\rho_1] + \cdots + [\rho_r]$ dans le monoïde commutatif libre de base la réunion disjointe des $\mathrm{Irr}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}_m)$, $m \geqslant 1$. Elle est uniquement déterminée et s'appelle le support cuspidal de π (voir [**31**, II.2.20] et [**21**, 2]).

1.5. Soient H un sous-groupe ouvert de G et σ une représentation de H sur un R-espace vectoriel V. On note $\mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ l'induite compacte de σ à G, constituée des fonctions $f : \mathrm{G} \to \mathrm{V}$ localement constantes à support compact modulo H telles que $f(hg) = \sigma(h)f(g)$ pour $h \in \mathrm{H}$, $g \in \mathrm{G}$, et :

$$\mathcal{H}(\mathrm{G}, \sigma) \tag{1.4}$$

l'*algèbre de Hecke* de G relativement à σ, c'est-à-dire l'algèbre des G-endomorphismes de $\mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$. Par réciprocité de Frobenius et décomposition de Mackey, elle s'identifie à l'algèbre de convolution des fonctions $f : \mathrm{G} \to \mathrm{End}_{\mathrm{R}}(\mathrm{V})$ telles que $f(hgh') = \sigma(h) \circ f(g) \circ \sigma(h')$ pour tous $h, h' \in \mathrm{H}$ et $g \in \mathrm{G}$ et dont le support est une union finie de H-doubles classes.

Si σ est le caractère trivial du groupe H, on note simplement $\mathcal{H}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ l'algèbre de Hecke qui lui correspond.

1.6. Soit ℓ un nombre premier différent de p. On note $\mathbb{Q}_\ell$ le corps des nombres ℓ-adiques, $\mathbb{Z}_\ell$ son anneau d'entiers et $\mathbb{F}_\ell$ le corps résiduel de $\mathbb{Z}_\ell$. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$, on note $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ son anneau d'entiers et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ le corps résiduel de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, qui est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_\ell$.

Définition 1.2. — Une représentation de G sur un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel V est *entière* si elle est admissible et si elle admet une *structure entière*, c'est-à-dire un sous-$\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module de V stable par G et engendré par une base de V sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (voir [**31, 34**]).

Soit $\tilde{\pi}$ une représentation irréductible entière de G sur un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel V. D'après [**35**, Theorem 1] et [**31**, II.5.11], on a les propriétés suivantes :

(1) toutes les structures entières de $\tilde{\pi}$ sont de type fini comme $\overline{\mathbb{Z}}_\ell\mathrm{G}$-modules ;

(2) si $\mathfrak{v}$ est une structure entière de $\tilde{\pi}$, la représentation de G sur $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est de longueur finie ;

(3) la semi-simplifiée de $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$, qu'on note $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi})$ et qu'on appelle la *réduction* de $\tilde{\pi}$, ne dépend pas du choix de $\mathfrak{v}$ mais seulement de la classe d'isomorphisme de $\tilde{\pi}$.

Par linéarité, on a un morphisme de groupes :

$$\mathbf{r}_\ell : \mathscr{G}^{\mathrm{en}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G}) \to \mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}), \tag{1.5}$$

où $\mathscr{G}^{\mathrm{en}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G})$ est le sous-groupe de $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{G})$ engendré par les classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles entières de G.

Remarque 1.3. — Si H est un groupe profini, toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de dimension finie de H est entière (Serre [**30**], théorème 32), et on a un morphisme de réduction $\mathbf{r}_\ell$ analogue à (1.5).

1.7. Soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière d'un sous-groupe ouvert H de G. Si $\mathfrak{v}$ est une structure entière de $\tilde{\sigma}$, alors d'après [**35**, Proposition II.3] le sous-module $\mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v})$ des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{v}$ est une structure entière de $\mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\tilde{\sigma})$ et on a un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell \simeq \mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell). \tag{1.6}$$

Si en outre $\mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\tilde{\sigma})$ est de longueur finie, ceci implique que $\mathbf{r}_\ell([\mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\tilde{\sigma})]) = [\mathrm{ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}))]$.

1.8. On choisit des racines carrées de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de sorte que la seconde soit la réduction modulo ℓ de la première. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{MU}$ un sous-groupe parabolique de G. Si $\mathfrak{v}$ est une structure entière d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière $\tilde{\sigma}$ de M, le sous-espace $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v})$ des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{v}$ est une structure entière de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tilde{\sigma})$ et on a un isomorphisme naturel :

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell \simeq \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell). \tag{1.7}$$

Si en outre $\tilde{\sigma}$ est de longueur finie, ceci implique que $\mathbf{r}_\ell([\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tilde{\sigma})]) = [\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}))]$. Voir [**31**, II.5].

2. Types simples et semi-simples pour $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$

Dans cette section, on définit des représentations irréductibles de certains sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, appelées R-types simples (§2.5) et semi-simples (§2.7). Cette construction est due à Bushnell-Kutzko [**8, 10**] dans le cas des représentations complexes de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$. Elle a ensuite été adaptée par Vignéras [**31, 32**] aux représentations modulaires de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ et généralisée aux représentations complexes de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ par Broussous [**2**], Sécherre [**24, 25, 26**] puis Sécherre-Stevens [**29**].

Les paragraphes 2.1 à 2.5 établissent la construction progressive des R-types simples à partir des strates et des caractères simples. On introduit au paragraphe 2.6 la notion de paire couvrante, puis on définit au paragraphe 2.7 les R-types semi-simples de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ comme paires couvrantes de R-types simples maximaux de sous-groupes de Levi de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. On calcule les algèbres de Hecke associées à ces R-types simples et semi-simples. On étudie au paragraphe 2.8 la réduction modulo ℓ des types simples, ce qui fournit une autre preuve de l'existence des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-types simples.

2.1. Strates simples

Dans ce paragraphe, on rappelle le langage des strates simples. On trouvera plus de détails dans [**8, 10, 24**].

2.1.1. Soient A une F-algèbre centrale simple et V_{A} un A-module à gauche simple. L'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V}_{\mathrm{A}})$ est une F-algèbre à division dont l'algèbre opposée est notée D. Aussi V_{A} est-il un D-espace vectoriel à droite, et on a un isomorphisme canonique de F-algèbres entre A et $\mathrm{End}_{\mathrm{D}}(\mathrm{V}_{\mathrm{A}})$.

Si A est une algèbre centrale simple sur une extension finie K de F, on note $\mathrm{N}_{\mathrm{A}/\mathrm{K}}$ et $\mathrm{tr}_{\mathrm{A}/\mathrm{K}}$ respectivement la norme et la trace réduites de A sur K.

2.1.2. Une $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-*chaîne de réseaux* de V_{A} est une suite $\mathscr{L} = (\mathscr{L}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-réseaux de V_{A} qui est strictement décroissante et pour laquelle il existe un entier $e \geqslant 1$ (appelé la *période* de Λ sur $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$) tel qu'on ait $\mathscr{L}_{k+e} = \mathscr{L}_k\mathfrak{p}_{\mathrm{D}}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Un $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-*ordre héréditaire* de A est une sous-$\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-algèbre $\mathfrak{A}$ de A telle qu'il y ait une $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-chaîne de réseaux $\mathscr{L}$ de V_{A} pour laquelle :

$$\mathfrak{A} = \{a \in \mathrm{A} \mid a\mathscr{L}_k \subseteq \mathscr{L}_k,\ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.1}$$

Deux $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-chaînes de réseaux translatées l'une de l'autre définissent le même $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-ordre héréditaire, et l'application $\mathscr{L} \mapsto \mathfrak{A}$ définie par (2.1) induit une bijection entre classes de translation de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-chaînes de réseaux de V_{A} et $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-ordres héréditaires de A. Si $\mathfrak{A}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-ordre héréditaire de A défini par une $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-chaîne de réseaux $\mathscr{L}$, le sous-$\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-module :

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \{a \in \mathrm{A} \mid a\mathscr{L}_k \subseteq \mathscr{L}_{k+1},\ k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.2}$$

est le radical de Jacobson de $\mathfrak{A}$. On note :

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) = \{g \in \mathrm{A}^{\times} \mid g\mathfrak{A}g^{-1} = \mathfrak{A}\} \tag{2.3}$$

le normalisateur de $\mathfrak{A}$ dans $\mathrm{A}^{\times}$. Pour $g \in \mathfrak{K}$, on note $\upsilon_{\mathfrak{A}}(g)$ l'entier $n \in \mathbb{Z}$ défini par $g\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^n$. L'application $\upsilon_{\mathfrak{A}}$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{K}$ dans $\mathbb{Z}$, dont le noyau $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ est le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{A}$. On pose $\mathrm{U}^0(\mathfrak{A}) = \mathrm{U}(\mathfrak{A})$ et, pour $k \geqslant 1$, on pose $\mathrm{U}^k(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}^k$.

2.1.3. Une *strate* de A est un quadruplet $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ composé d'un $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de A, de deux entiers r, n vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$ et d'un élément $\beta \in \mathfrak{P}^{-n}$. Deux strates $[\mathfrak{A}, n, r, \beta_i]$, avec $i \in \{1, 2\}$, sont dites *équivalentes* si $\beta_2 - \beta_1 \in \mathfrak{P}^{-r}$.

Étant donnée une strate $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ de A, on note E la F-algèbre engendrée par β. Cette strate est dite *pure* si E est un corps, si l'ordre $\mathfrak{A}$ est normalisé par $\mathrm{E}^{\times}$ et si $\upsilon_{\mathfrak{A}}(\beta) = -n$. Dans ce cas, on note B le commutant de E dans A : c'est une E-algèbre centrale simple, et $\mathfrak{A} \cap \mathrm{B}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$-ordre héréditaire de B. Le plus petit entier $k \geqslant \upsilon_{\mathfrak{A}}(\beta)$ pour lequel tout élément $x \in \mathfrak{A}$ tel que $\beta x - x\beta \in \mathfrak{P}^k$ soit contenu dans $\mathfrak{A} \cap \mathrm{B} + \mathfrak{P}$ est noté $k_0(\beta, \mathfrak{A})$ et porte le nom d'*exposant critique* de la strate pure $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$.

Définition 2.1. — Une strate $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ de A est *simple* si elle est pure et si $r < -k_0(\beta, \mathfrak{A})$.

2.1.4. À toute strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A on associe dans [**24**, 3.3] deux sous-groupes ouverts compacts $\mathrm{H}(\beta, \mathfrak{A})$, $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$. Chacun d'eux est filtré par une suite décroissante de pro-p-sous-groupes ouverts compacts :

$$\mathrm{H}^k(\beta, \mathfrak{A}) = \mathrm{H}(\beta, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{U}^k(\mathfrak{A}), \quad \mathrm{J}^k(\beta, \mathfrak{A}) = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{U}^k(\mathfrak{A}), \quad k \geqslant 1. \tag{2.4}$$

On renvoie à [**24, 28**] pour une étude détaillée des propriétés de ces groupes.

2.2. Caractères simples

On choisit un homomorphisme injectif $\iota_{p,\mathrm{R}}$ du groupe $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$ des racines complexes de l'unité d'ordre une puissance de p vers le groupe multiplicatif $\mathrm{R}^{\times}$, ainsi qu'un caractère complexe additif $\psi_{\mathrm{F},\mathbb{C}} : \mathrm{F} \to \mathbb{C}^{\times}$ trivial sur $\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}$ mais pas sur $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$.

2.2.1. Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, et soit $q_0 = -k_0(\beta, \mathfrak{A})$. Dans [**24**, 3.3], on associe à cette strate et à tout entier $0 \leqslant m \leqslant q_0 - 1$ un ensemble fini $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}, m, \beta)$ (qui dépend de $\psi_{\mathrm{F},\mathbb{C}}$) de caractères complexes de $\mathrm{H}^{m+1}(\beta, \mathfrak{A})$ appelés caractères simples de niveau m.

2.2.2. Comme les $\mathrm{H}^{m+1}(\beta, \mathfrak{A})$, pour $0 \leqslant m \leqslant q_0 - 1$, sont des pro-$p$-groupes, l'application $\theta \mapsto \iota_{p,\mathrm{R}} \circ \theta$ est bien définie pour $\theta \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}, m, \beta)$. Son image, notée $\mathcal{C}_{\mathrm{R}}(\mathfrak{A}, m, \beta)$, est un ensemble de R-caractères de $\mathrm{H}^{m+1}(\beta, \mathfrak{A})$ appelés R-*caractères simples de niveau* m. Toutes les propriétés des caractères simples complexes se transportent aux R-caractères simples. On renvoie le lecteur à [**8, 10, 6, 24, 28, 4**] pour une étude détaillée de ces propriétés.

2.2.3. Soit $[\mathfrak{A}', n', 0, \beta']$ une strate simple d'une F-algèbre centrale simple A', et supposons qu'il existe un isomorphisme de F-algèbres φ de $\mathrm{F}(\beta)$ vers $\mathrm{F}(\beta')$ tel que $\varphi(\beta) = \beta'$. Il existe alors une bijection :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{R}}(\mathfrak{A}, 0, \beta) \to \mathcal{C}_{\mathrm{R}}(\mathfrak{A}', 0, \beta') \tag{2.5}$$

canoniquement associée à φ, appelée application de transfert (voir [**24**, 3.3.3]).

On utilisera, dans la section 4 notamment, une relation d'équivalence entre caractères simples appelée *endo-équivalence*. On renvoie à [**6, 4**] pour une définition de cette relation.

2.3. β-extensions

2.3.1. Soit H un sous-groupe ouvert de $\mathrm{G} = \mathrm{A}^\times$ et soit σ une représentation de H. Si $y \in \mathrm{G}$, on note $\mathrm{I}_y(\sigma)$ le R-espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}\cap\mathrm{H}^y}(\sigma, \sigma^y)$, et on note $\mathrm{I}_\mathrm{G}(\sigma)$ l'ensemble des $y \in \mathrm{A}^\times$ pour lesquels $\mathrm{I}_y(\sigma)$ n'est pas nul, qu'on appelle *ensemble d'entrelacement* de σ dans G.

2.3.2. Soient $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A et $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathrm{B}$ le $\mathcal{O}_\mathrm{E}$-ordre héréditaire de B défini par $\mathfrak{A}$. L'égalité $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$ induit un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})/\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A}) \simeq \mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}) \tag{2.6}$$

permettant d'associer canoniquement et bijectivement une représentation de $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ triviale sur $\mathrm{J}^1 = \mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$ à une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ triviale sur $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$.

2.3.3. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ un caractère simple. D'après [**24**, 3.3.2], le normalisateur de θ dans G contient $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{B}^\times)\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ et son ensemble d'entrelacement dans G est $\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})\mathrm{B}^\times\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$.

Proposition 2.2. — *Il existe une représentation irréductible η de J^1, unique à isomorphisme près, dont la restriction à $\mathrm{H}^1 = \mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A})$ contient θ. Elle possède les propriétés suivantes :*

(1) *sa dimension sur* R *est égale à $(\mathrm{J}^1 : \mathrm{H}^1)^{1/2}$, sa restriction à H^1 est un multiple de θ, et l'induite de θ à J^1 est un multiple de η ;*

(2) *elle est normalisée par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{B}^\times)\mathrm{J}$, son ensemble d'entrelacement dans* G *est égal à $\mathrm{J}^1\mathrm{B}^\times\mathrm{J}^1$ et, pour tout $y \in \mathrm{B}^\times$, le* R*-espace d'entrelacement $\mathrm{I}_y(\eta)$ est de dimension* 1 *;*

(3) *la représentation induite de η au groupe $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$ est irréductible.*

Démonstration. — Puisque R est algébriquement clos et de caractéristique différente de p, et puisque J^1 est un pro-p-groupe, toutes ses représentations sont semi-simples, et la preuve existant dans le cas complexe (voir [**5**, 8.3] et [**25**, Proposition 2.10]) s'applique. □

On appelle cette représentation η la *représentation de Heisenberg* associée à θ.

2.3.4. Une *β-extension* de η (ou de θ) est une représentation irréductible de J prolongeant η dont l'entrelacement dans G est égal à $\mathrm{J}\mathrm{B}^\times\mathrm{J}$. On note $\mathcal{B}(\theta) = \mathcal{B}_\mathrm{R}(\theta)$ l'ensemble des β-extensions de θ.

Si R est le corps des nombres complexes, on sait d'après [**25**] (voir *ibid.*, théorème 2.28) que tout caractère simple admet une β-extension. On va voir que la méthode utilisée dans [**25**] est encore valable dans le cas où R est quelconque, et par conséquent que tout R-caractère simple admet une β-extension. Dans le cas où $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, on verra au paragraphe 2.8 comment prouver ce résultat par réduction modulo ℓ (voir le corollaire 2.7).

Lemme 2.3. — *La représentation η se prolonge à* J *et, pour toute représentation κ de* J *prolongeant η, l'induite de κ à $\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$ est irréductible.*

Démonstration. — Pour prouver l'existence d'une représentation de J prolongeant η, on reprend la preuve de [**25**, Théorème 2.13] qui est encore valable lorsque R est de caractéristique non nulle. Si κ est un tel prolongement, on note ρ l'induite de κ à $\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$. Le fait que l'ensemble d'entrelacement de κ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$ soit égal à J implique que l'algèbre des endomorphismes de ρ est de dimension 1, mais ceci ne suffit pas, lorsque R est de caractéristique non nulle, pour en déduire que ρ est irréductible. Pour appliquer le critère d'irréductibilité [**33**, 4.2], il s'agit de montrer que, pour tout quotient irréductible π de ρ, la représentation κ est un facteur direct de la restriction de π à J. Soit π un tel quotient irréductible. Puisque J^1 est un pro-p-groupe, la restriction de π à J^1 se décompose sous la forme :

$$\mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_r,$$

où $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_r$ sont des copies de η et où aucun facteur irréductible de V_0 n'est isomorphe à η. Ces sous-espaces sont stables par J, et la représentation de J sur V_i, $i \geqslant 1$, est de la forme $\kappa\chi_i$ où χ_i est un caractère de J trivial sur J^1. Comme κ est une sous-représentation de la restriction de π à J, l'un des χ_i est trivial, et ainsi le critère [**33**, 4.2] est vérifié. □

Si κ est une β-extension de θ et si χ est un caractère de $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}^{\times}$, on note κ^{χ} la représentation κ tordue par $\chi \circ \mathrm{N}_{\mathrm{B}/\mathrm{E}}$ vu comme un caractère de J trivial sur J^1.

Lemme 2.4. — *On suppose qu'il existe une β-extension de θ. Le groupe des caractères de $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}^{\times}$ opère librement et transitivement sur $\mathcal{B}(\theta)$ par $(\kappa, \chi) \mapsto \kappa^{\chi}$.*

Démonstration. — L'argument de [**25**, Théorème 2.28] est encore valable ici. □

2.3.5. Soit $\mathfrak{A}'$ un ordre héréditaire E-pur de A, soit θ' le transfert de θ dans $\mathcal{C}(\mathfrak{A}', 0, \beta)$ et soit $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap \mathrm{B}$.

Lemme 2.5. — *On suppose que $\mathfrak{A}'$ est inclus dans $\mathfrak{A}$.*

(1) *Pour toute β-extension κ de θ, il existe une unique β-extension $\kappa' \in \mathcal{B}(\theta')$ tel que κ' et la restriction de κ à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{J}^1$ induisent à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ des représentations isomorphes.*

(2) *L'application :*

$$\kappa \mapsto \kappa'$$

ainsi définie de $\mathcal{B}(\theta)$ dans $\mathcal{B}(\theta')$ est bijective.

Démonstration. — On suppose qu'il existe une β-extension κ de θ. En reprenant l'argument de [**8**, (5.2.5)], on montre qu'il existe une unique représentation irréductible κ' de $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}')$ prolongeant la représentation de Heisenberg de θ' et telle que :

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{J}(\beta,\mathfrak{A}')}^{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}(\kappa') \simeq \operatorname{ind}_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{J}^1}^{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}(\kappa). \tag{2.7}$$

On vérifie comme dans la preuve de [**25**, Proposition 2.9] que κ' est une β-extension.

On suppose maintenant qu'il existe une β-extension κ' de θ'. En reprenant l'argument de *ibid.*, lemme 2.27 et théorème 2.28, on obtient une représentation irréductible κ de J prolongeant η, vérifiant (2.7) et dont la restriction à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{J}^1$ est entrelacée par $\mathrm{B}^{\times}$. Pour montrer que κ est une β-extension, on reprend la preuve de *ibid.*, proposition 2.25, qui repose sur une propriété géométrique du groupe G (*ibid.*, lemme 2.26). On obtient ainsi une application surjective $\kappa \mapsto \kappa'$ entre deux ensembles de même cardinal (lemme 2.4) : elle est donc bijective. □

En traçant dans l'immeuble de Bruhat-Tits de G le segment reliant les points correspondant à $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$, on forme une suite finie $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_r$ d'ordres héréditaires E-purs de A tels que $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}'$ et tels que, pour chaque $i \geqslant 1$, l'ordre $\mathfrak{A}_i$ contienne ou soit contenu dans $\mathfrak{A}_{i-1}$ (voir [**26**, 4.2]). En composant les bijections associées par le lemme 2.5 à chaque couple $(\mathfrak{A}_{i-1}, \mathfrak{A}_i)$, on obtient une application bijective :

$$\mathcal{B}_{\mathrm{R}}(\theta) \to \mathcal{B}_{\mathrm{R}}(\theta') \tag{2.8}$$

compatible à l'action du groupe des caractères de $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}^{\times}$ (lemme 2.4), appelée application de transfert.

2.3.6. Dans ce paragraphe, on suppose que A est égale à $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$. Un $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ est dit *standard* si $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$ dont la réduction modulo $\mathfrak{p}_\mathrm{D}$ est formée de matrices triangulaires supérieures par blocs. Si ces blocs sont de tailles $m_1, \dots, m_r$ respectivement, on pose $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ et on note $\mathfrak{A}_\alpha$ l'ordre standard correspondant. On a un isomorphisme canonique de groupes :

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\alpha)/\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}_\alpha) \to \mathrm{GL}_{m_1}(\mathfrak{k}_\mathrm{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(\mathfrak{k}_\mathrm{D}), \tag{2.9}$$

de sorte qu'on identifiera, par inflation, une représentation de $\mathrm{GL}_{m_1}(\mathfrak{k}_\mathrm{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(\mathfrak{k}_\mathrm{D})$ à une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\alpha)$ triviale sur $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}_\alpha)$.

2.3.7. Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathrm{A} = \mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ et que $\mathfrak{A}$ est un ordre standard. Étant donné un entier $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{M} = \mathrm{G}_m \times \cdots \times \mathrm{G}_m$, qui est un sous-groupe de Levi standard de G_{mn}, on note P le sous-groupe parabolique standard correspondant, U son radical unipotent et U^- le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à P par rapport à M. On pose :

$$\mathrm{J}_\mathrm{M} = \mathrm{J} \times \cdots \times \mathrm{J}. \tag{2.10}$$

On note $\mathfrak{A}_n$ l'ordre principal standard de $\mathscr{M}_{mn}(\mathrm{D})$ dont la période est égale à n fois celle de $\mathfrak{A}$, on note $\theta_n \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_n, 0, \beta)$ le transfert de θ et on pose $\mathrm{J}_n = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}_n)$. Alors :

$$\mathrm{K} = \mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A}_n)\,(\mathrm{J}_n \cap \mathrm{P}) \tag{2.11}$$

est un sous-groupe d'indice fini de J_n admettant une décomposition d'Iwahori relativement à tout sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M, et $\mathrm{K} \cap \mathrm{M}$ est égal à $\mathrm{J}_n \cap \mathrm{M}$, qui s'identifie naturellement à J_M.

Proposition 2.6. — *On suppose qu'il existe une β-extension κ de θ et on note κ_M la représentation $\kappa \otimes \cdots \otimes \kappa$ de J_M.*

(1) *Il existe une unique représentation irréductible $\varkappa$ de* K *qui prolonge κ_M et qui soit triviale sur* $\mathrm{K} \cap \mathrm{U}$ *et* $\mathrm{K} \cap \mathrm{U}^-$.

(2) *L'application :*

$$\kappa \mapsto \kappa_n = \mathrm{ind}_\mathrm{K}^{\mathrm{J}_n}(\varkappa) \tag{2.12}$$

induit une bijection de $\mathcal{B}(\theta)$ dans $\mathcal{B}(\theta_n)$.

Démonstration. — L'unicité de $\varkappa$ est une conséquence de la décomposition d'Iwahori :

$$\mathrm{K} = (\mathrm{K} \cap \mathrm{U}^-) \cdot (\mathrm{K} \cap \mathrm{M}) \cdot (\mathrm{K} \cap \mathrm{U}).$$

Pour l'existence, on vérifie comme dans [**25**, 2.3] que l'application $\varkappa$ définie sur K par :

$$\varkappa(uxu') = \kappa_\mathrm{M}(x), \quad u \in \mathrm{K} \cap \mathrm{U}^-,\ x \in \mathrm{K} \cap \mathrm{M},\ u' \in \mathrm{K} \cap \mathrm{U},$$

est une représentation de K qui prolonge κ_M, puis on vérifie comme dans *ibid.*, théorèmes 2.18 et 2.19, que κ_n est une β-extension de θ_n. Pour prouver que l'application définie par (2.12) est bijective, on vérifie que l'on obtient l'application réciproque en calculant, pour tout $\rho \in \mathcal{B}(\theta_n)$, la représentation de J_M sur l'espace des vecteurs $\mathrm{K} \cap \mathrm{U}$-invariants de ρ, qui est de la forme $\kappa \otimes \cdots \otimes \kappa$ pour un certain $\kappa \in \mathcal{B}(\theta)$. □

2.3.8. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 2.7. — *Pour tout $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$, il existe une β-extension de θ.*

Démonstration. — On reprend l'argument de [**25**], dont on rappelle les principales étapes. On prouve d'abord le résultat dans le cas où B est une algèbre à division, ce qui se fait en suivant la preuve de [**25**, Lemme 2.21]. Ensuite, la proposition 2.6 implique que le résultat est vrai quand $\mathfrak{B}$ est un ordre minimal de B, puis la propriété de transfert (2.8) implique le résultat dans le cas général. □

2.4. Types semi-simples de niveau 0

Soit A une F-algèbre centrale simple et soit $\mathrm{G} = \mathrm{A}^\times$. Soit (U, σ) un couple constitué d'un sous-groupe ouvert compact U de G et d'une représentation irréductible σ de U.

Définition 2.8. — On dit que (U, σ) est un *type semi-simple de niveau* 0 de G s'il y a un ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de A, une famille d'entiers $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ de somme m et, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, une représentation irréductible cuspidale σ_i de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathfrak{k}_\mathrm{D})$ tels que :

(1) on a $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{A})$;

(2) il existe un isomorphisme de F-algèbres de A sur $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ identifiant d'une part $\mathfrak{A}$ à $\mathfrak{A}_\alpha$, d'autre part σ à $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$, celle-ci étant vue par l'intermédiaire de (2.9) comme une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\alpha)$ triviale sur $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}_\alpha)$.

Remarque 2.9. — La définition ci-dessus est plus générale que celle de Grabitz, Silberger et Zink [**17**], qui ne concerne que le cas où A est $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ et où $\mathfrak{A}$ est un ordre standard.

Si $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sont toutes isomorphes à une même représentation irréductible cuspidale σ_0, on dit que (U, σ) est un *type simple de niveau* 0 de G.

Un type simple (U, σ) de niveau 0 de G est dit *maximal* si U est un sous-groupe compact maximal de G.

Exemple 2.10. — Soit $\mathrm{I} = \mathrm{U}(\mathfrak{A}_{(1,\dots,1)})$ le sous-groupe d'Iwahori standard de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ et soit 1_I son caractère trivial. Alors $(\mathrm{I}, 1_\mathrm{I})$ est un type simple de niveau 0 de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$.

Soit (U, σ) un type semi-simple de niveau 0 de G. On fixe un isomorphisme entre A et $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ comme dans la définition 2.8 et on identifie U à $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\alpha)$. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\alpha$ et on note $\mathcal{N}_\sigma$ le normalisateur dans G de la restriction de σ à $\mathrm{U} \cap \mathrm{M}$.

Lemme 2.11. — (1) *L'ensemble d'entrelacement de σ dans* G *est égal à* $\mathrm{U} \cdot \mathcal{N}_\sigma \cdot \mathrm{U}$ *et, pour* $y \in \mathrm{I}_\mathrm{G}(\sigma)$, *on a* $\dim_\mathrm{R} \mathrm{I}_y(\sigma) = 1$.

(2) *Pour tout $x \in \mathcal{N}_\sigma$, on a un isomorphisme de* R*-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{U} \cap \mathrm{U}^x}(\sigma, \sigma^x) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}/\mathrm{U}^1}(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^x),$$

où $\bar{\sigma}$ désigne la représentation de U/U^1 *définie par σ.*

Démonstration. — Les preuves de la proposition 1.2 et du lemme 1.5 de [**17**] sont encore valables. En particulier, les intégrales apparaissant dans *ibid.*, lemmes 1.3 et 1.4, portent sur des pro-p-groupes et ont un sens relativement à une mesure de Haar à valeurs dans R.

Pour le calcul de la dimension de l'espace d'entrelacement, on peut voir σ comme une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{U}/\mathrm{U}^1 \simeq \mathrm{GL}_{m_1}(\mathfrak{k}_\mathrm{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(\mathfrak{k}_\mathrm{D})$ et on conclut au moyen de [**31**, III.2.6]. □

Si $\mathfrak{A}$ est un $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-ordre héréditaire de A, on désigne par $\mathcal{T}(\mathfrak{A}) = \mathcal{T}_\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ qui sont des types semi-simples de niveau 0 de G.

2.5. Types simples

Soit A la F-algèbre centrale simple $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ et soit $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$.

2.5.1. Soit un couple (J, λ) constitué d'un sous-groupe ouvert compact J de G et d'une représentation irréductible λ de J.

Définition 2.12. — On dit que (J, λ) est un R-*type simple de niveau non nul* de G s'il y a une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A, un caractère simple $\theta \in \mathcal{C}_\mathrm{R}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$, une β-extension κ de θ et une représentation σ de $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{B})$ tels que :

(1) on a $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$;

(2) le couple (U, σ) est un R-type simple de niveau 0 de $\mathrm{B}^\times$;

(3) la représentation λ est isomorphe à $\kappa \otimes \sigma$, où σ est considérée comme une représentation de $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ triviale sur $\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$.

Remarque 2.13. — (1) Si (J, λ) est un type simple de niveau non nul, la strate simple définissant le groupe J n'est en général pas unique (pas même à équivalence près).

(2) Comme B est une E-algèbre centrale simple (voir le paragraphe 2.1.3), il existe un entier $m' \geqslant 1$, une E-algèbre à division centrale D' et un isomorphisme de E-algèbres :

$$\mathrm{B} \to \mathscr{M}_{m'}(\mathrm{D}'). \tag{2.13}$$

D'après le paragraphe 2.4, il existe un isomorphisme (2.13) identifiant d'une part l'ordre $\mathfrak{B}$ à un ordre principal standard de période notée r, d'autre part σ à $\sigma_0 \otimes \cdots \otimes \sigma_0$, où σ_0 est une représentation irréductible cuspidale du groupe $\mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$ avec $m' = rs$.

Un type simple (J, λ) de niveau non nul de G est dit *maximal* si (U, σ) est maximal, ce qui ne dépend pas du choix de la strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ dans la définition 2.12.

Remarque 2.14. — Par *type simple* de G on entendra type simple de niveau nul ou non nul de G. Pour harmoniser les notations et la terminologie, on introduit la strate nulle :

$$[\mathfrak{A}, 0, 0, 0]$$

parmi les strates simples, où $\mathfrak{A}$ est un ordre héréditaire de A. On pose $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ et :

$$\mathrm{H}(0, \mathfrak{A}) = \mathrm{J}(0, \mathfrak{A}) = \mathrm{U}(\mathfrak{A}).$$

L'unique caractère simple attaché à cette strate est le caractère trivial de $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$, et le caractère trivial de $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ est une 0-extension de ce caractère simple.

Proposition 2.15. — *Un type simple de* G *est irréductible.*

Démonstration. — Pour les types simples de niveau 0, c'est une conséquence de la définition 2.8. Pour le niveau non nul, on peut reprendre l'argument de [**31**, III.4.23]. □

Étant donné un caractère simple θ relatif à une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A, on désigne par $\mathcal{T}(\theta) = \mathcal{T}_\mathrm{R}(\theta)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ qui sont des types simples contenant θ.

2.5.2. Soit $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ un caractère simple et soit κ une β-extension de θ. On pose $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ et $\mathrm{J}^1 = \mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$.

Lemme 2.16. — *Soit π une représentation irréductible de* J. *La restriction de π à $\mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A})$ contient θ si et seulement si π est isomorphe à $\kappa \otimes \xi$, où ξ est une représentation irréductible de* J *triviale sur* J^1.

Démonstration. — Puisque J^1 est un pro-p-groupe, la restriction de π à J^1 est semi-simple. Elle contient donc la représentation η, de sorte que, par réciprocité de Frobenius, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{J}}(\eta), \pi) \neq 0.$$

Puisque κ prolonge η à J, l'induite de η à J est isomorphe à $\kappa \otimes \mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{J}}(1)$, où 1 désigne le caractère trivial de J^1. Soit ξ un sous-quotient de $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{J}}(1)$ de dimension minimale parmi ceux vérifiant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}}(\kappa \otimes \xi, \pi) \neq 0$, et soit ϕ un homomorphisme non trivial de $\kappa \otimes \xi$ dans π. On note V l'espace de ξ. Si W est un sous-espace propre de V tel que $\kappa \otimes \mathrm{W}$ soit stable par J, on a une suite exacte :

$$\kappa \otimes \mathrm{W} \to \kappa \otimes \mathrm{V} \to \kappa \otimes (\mathrm{V}/\mathrm{W}) \to 0$$

de représentations de J. La propriété de minimalité de V entraîne que l'image de $\kappa \otimes \mathrm{W}$ dans $\kappa \otimes \mathrm{V}$ est contenue dans $\mathrm{Ker}(\phi)$. On a donc un homomorphisme non nul de $\kappa \otimes (\mathrm{V}/\mathrm{W})$ dans π. Par minimalité encore, on a $\mathrm{W} = 0$, ce dont on déduit que ξ est irréductible. □

Remarque 2.17. — Plus généralement, le même argument montre que si G' est un sous-groupe de G contenant J et si π est une représentation de G', alors la restriction de π à $\mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A})$ contient θ si et seulement si la restriction de π à J a une sous-représentation de la forme $\kappa \otimes \xi$, avec ξ une représentation irréductible de J triviale sur J^1.

2.5.3. Soit ξ une représentation irréductible de J triviale sur J^1, soit $\mathfrak{A}'$ un ordre héréditaire E-pur de A et soit θ' le transfert de θ dans $\mathcal{C}(\mathfrak{A}', 0, \beta)$. On pose $\mathrm{J}' = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}')$ et $\mathrm{J}'^1 = \mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A}')$, et on note κ' la β-extension de θ' obtenue par transfert de κ (voir (2.8)).

Lemme 2.18. — *On suppose que $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap \mathrm{B}$ contient $\mathfrak{B}$. On note ξ' la représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}'^1$ triviale sur J'^1 définie par ξ et on pose $\mu = \kappa'|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}'^1} \otimes \xi'$.*

(1) *L'ensemble $\mathrm{I}_{\mathrm{G}}(\mu)$ est égal à $\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}'^1 \cdot \mathrm{I}_{\mathrm{B}^\times}(\xi) \cdot \mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}'^1$ et, pour tout élément $y \in \mathrm{B}^\times$, on a $\mathrm{I}_y(\mu) = \mathrm{I}_y(\kappa'|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}'^1}) \otimes \mathrm{I}_y(\xi')$.*

(2) *Les représentations $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\kappa \otimes \xi)$ et $\mathrm{ind}_{\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}'^1}^{\mathrm{G}}(\mu)$ sont isomorphes, et on a un isomorphisme de* R*-algèbres :*

$$\mathcal{H}(\mathrm{G}, \kappa \otimes \xi) \to \mathcal{H}(\mathrm{G}, \mu)$$

préservant les supports, c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{H}(\mathrm{G}, \kappa \otimes \xi)$ de support $\mathrm{J}y\mathrm{J}$ avec $y \in \mathrm{I}_{\mathrm{B}^\times}(\xi)$ a une image dont le support est $\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}'^1 y \mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}'^1$.

Démonstration. — Pour prouver (1), on reprend l'argument de [**26**, Lemme 4.2] et pour (2), on reprend l'argument de *ibid.*, proposition 4.5. □

2.5.4. Soit (J,λ) un type simple de G. On reprend les notations de la définition 2.12 et de la remarque 2.13. On note $\mathrm{M_B}$ le sous-groupe de Levi standard de $\mathrm{B}^\times$ constitué des matrices diagonales par blocs de taille s et $\mathcal{N}_\lambda$ le normalisateur dans $\mathrm{B}^\times$ de la restriction de σ à $\mathrm{U}\cap\mathrm{M_B}$. On note $b(\sigma)$ le cardinal de l'orbite de σ sous le groupe de Galois :

$$\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}/\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}), \tag{2.14}$$

où σ est considérée comme une représentation de $\mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})^r$. On fixe une uniformisante ϖ de D', et on note $\mathcal{W}_\lambda$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathrm{D}')$ constitué des matrices monomiales dont les coefficients non nuls sont des puissances de :

$$\varpi_\lambda = \varpi^{b(\sigma)}. \tag{2.15}$$

On voit $\mathcal{W}_\lambda$ comme un sous-groupe de $\mathrm{B}^\times$ par l'intermédiaire de (2.13) et du plongement diagonal de D' dans $\mathscr{M}_s(\mathrm{D}')$. L'action de ϖ par conjugaison sur $\mathcal{O}_{\mathrm{D}'}$ induit un automorphisme de $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}$ engendrant le groupe Γ. Le groupe $\mathcal{N}_\lambda$ est donc engendré par $\mathcal{W}_\lambda$ et $\mathrm{U}\cap\mathrm{M_B}$ et l'ensemble $\mathrm{I_G}(\lambda)$ est la réunion disjointe des $\mathrm{J}w\mathrm{J}$ pour $w\in\mathcal{W}_\lambda$.

Lemme 2.19. — *L'ensemble d'entrelacement de λ dans* G *est égal à* $\mathrm{J}\cdot\mathcal{N}_\lambda\cdot\mathrm{J}$ *et, pour $y\in\mathrm{I_G}(\lambda)$, on a* $\dim_{\mathrm{R}}\mathrm{I}_y(\lambda)=1$.

Démonstration. — Dans le cas où (J,λ) est de niveau 0, c'est le lemme 2.11. Sinon, c'est une conséquence de la proposition 2.2 et des lemmes 2.18 et 2.11. $\square$

Remarque 2.20. — (1) Dans le cas où $\mathrm{D}=\mathrm{F}$, le groupe Γ est trivial et on a $b(\sigma)=1$.

(2) Le groupe $\mathcal{W}_\lambda$ vu comme sous-groupe de G dépend des choix de ϖ et de l'isomorphisme (2.13), mais l'ensemble $\mathrm{J}\cdot\mathcal{W}_\lambda\cdot\mathrm{J}=\mathrm{I_G}(\lambda)$ n'en dépend pas.

(3) Si (J,λ) est maximal, alors $\mathrm{I_G}(\lambda)$ est égal au normalisateur $\mathrm{N_G}(\lambda)$ de λ dans G. Celui-ci est engendré par J et ϖ_λ, c'est-à-dire que $\mathrm{N_G}(\lambda)=\mathrm{N}_{\mathrm{B}^\times}(\sigma)\mathrm{J}$. En outre, le normalisateur de U dans $\mathrm{B}^\times$ est engendré par U et ϖ, de sorte que $b(\sigma)$ est égal à l'indice de $\mathrm{N_G}(\lambda)$ dans $\mathrm{N}_{\mathrm{B}^\times}(\mathrm{U})\mathrm{J}$.

2.5.5. On note E_λ l'extension totalement ramifiée de E engendrée par ϖ_λ et l'on fixe une extension non ramifiée F' de E_λ de degré sd', où d' est le degré réduit de D' sur E. On note I' le sous-groupe d'Iwahori standard de $\mathrm{G}'=\mathrm{GL}_r(\mathrm{F}')$. On identifiera à loisir $\mathcal{W}_\lambda$ à un sous-groupe de G' ou bien de G.

Proposition 2.21. — *On a un isomorphisme de* R*-algèbres :*

$$\Psi:\mathcal{H}(\mathrm{G}',\mathrm{I}')\to\mathcal{H}(\mathrm{G},\lambda) \tag{2.16}$$

préservant les supports, c'est-à-dire que, pour toute fonction $f\in\mathcal{H}(\mathrm{G}',\mathrm{I}')$ de support $\mathrm{I}'w\mathrm{I}'$ avec $w\in\mathcal{W}_\lambda$, son image Ψf est de support $\mathrm{J}w\mathrm{J}$.

Démonstration. — On reprend l'argument de [**26**] en précisant les modifications devant lui être apportées. On fixe un ordre maximal $\mathfrak{B}_{\max}\supseteq\mathfrak{B}$ de B et on pose :

$$\bar{\mathrm{G}}=\mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\max})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_{\max}),\quad \bar{\mathrm{P}}=\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_{\max})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_{\max}).$$

On note $\bar\sigma$ la représentation σ considérée comme une représentation irréductible cuspidale de $\bar{\mathrm{M}}=\mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$ et on identifie $\bar{\mathrm{M}}$ à un sous-groupe de Levi de $\bar{\mathrm{G}}$. D'après Dipper et Fleischmann [**15, 16**], l'algèbre des endomorphismes de l'induite parabolique $\mathrm{Ind}_{\bar{\mathrm{P}}}^{\bar{\mathrm{G}}}(\bar\sigma)$ est isomorphe à une algèbre de Hecke de type A_{r-1} et de paramètre q', le cardinal du corps résiduel de F'. En d'autres termes, il existe un isomorphisme de R-algèbres :

$$\mathcal{H}(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}),\mathrm{I}') \to \mathcal{H}(\mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\max}),\sigma). \tag{2.17}$$

En reprenant la preuve de *ibid.*, lemme 4.4 et à l'aide du lemme 2.18(4), on obtient des homomorphismes de R-algèbres :

$$\mathcal{H}(\mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\max}),\sigma) \to \mathcal{H}(\mathrm{J}_{\max},\kappa_{\max}\otimes\sigma) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathrm{G},\lambda), \tag{2.18}$$

le premier étant un isomorphisme et le second injectif. En composant (2.17) et (2.18), on obtient un homomorphisme injectif Ψ de $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{\mathrm{F}'}),\mathrm{I}')$ dans $\mathcal{H}(\mathrm{G},\lambda)$. On pose :

$$h = h_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{r-1} \\ \varpi_\lambda & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_r(\mathscr{M}_s(\mathrm{D}')) = \mathrm{B} \tag{2.19}$$

où id_{r-1} est la matrice identité de $\mathscr{M}_{r-1}(\mathscr{M}_s(\mathrm{D}'))$, et on fixe une fonction $\varphi \in \mathcal{H}(\mathrm{G},\lambda)$ de support $\mathrm{J}h\mathrm{J}$. On va montrer qu'il existe un unique isomorphisme de R-algèbres (2.16) prolongeant Ψ, préservant les supports et prenant en la fonction caractéristique de $\mathrm{I}h\mathrm{I}$ la valeur φ. Pour cela, on reprend l'argument de *ibid.*, théorème 4.6, à ceci près que la preuve de *ibid.*, lemme 4.14, doit être modifiée.

Lemme 2.22. — *L'élément φ est inversible dans $\mathcal{H}(\mathrm{G},\lambda)$.*

Démonstration. — Soit $\varphi' \in \mathcal{H}(\mathrm{G},\lambda)$ une fonction de support $\mathrm{J}h^{-1}\mathrm{J}$. Le produit $\varphi * \varphi'$ est un multiple scalaire de l'élément neutre dans $\mathcal{H}$. Il est donc soit nul, soit inversible, et on va montrer que sa valeur en 1 n'est pas nulle. On fixe un ensemble X de représentants de J modulo $\mathrm{J}\cap h^{-1}\mathrm{J}h$, qu'on peut supposer être contenu dans J^1. On a :

$$\varphi * \varphi'(1) = \sum_{x\in\mathrm{X}} \lambda(x)\varphi(h)\varphi'(h^{-1})\lambda(x)^{-1}.$$

D'après le lemme 2.18(2), l'opérateur d'entrelacement $\varphi(h) \in \mathrm{I}_h(\lambda)$ se décompose sous la forme $\Phi_\kappa \otimes \Phi_\sigma$ avec $\Phi_\kappa \in \mathrm{I}_h(\kappa)$ et $\Phi_\sigma \in \mathrm{I}_h(\sigma)$, et le lemme 2.11(2) montre que Φ_σ est inversible. De façon analogue, l'opérateur d'entrelacement $\varphi'(h^{-1})$ se décompose sous la forme $\Phi'_\kappa \otimes \Phi'_\sigma$, où Φ'_σ est l'inverse de Φ_σ. On a donc :

$$\varphi * \varphi'(1) = \Big(\sum_{x\in\mathrm{X}} \eta(x)\Phi_\kappa\Phi'_\kappa\eta(x)^{-1}\Big) \otimes \mathrm{id}_\sigma, \tag{2.20}$$

où id_σ est l'identité sur l'espace de σ, et l'on note Π le facteur de gauche de ce produit tensoriel. Puisque $\mathrm{J}^1 \cap h^{-1}\mathrm{J}^1 h$ est un pro-p-groupe, la restriction de η à celui-ci est semi-simple. Il existe donc un unique facteur irréductible en commun entre les restrictions à $\mathrm{J}^1 \cap h^{-1}\mathrm{J}^1 h$ de η et de η^h, et l'opérateur $\Phi_\kappa\Phi'_\kappa$ est un multiple non nul de la projection sur ce facteur. En tant que représentation lisse irréductible d'un pro-p-groupe, ce facteur a pour dimension une puissance de p, qui est non nulle dans R. On en déduit que la trace de Π est non nulle, ce qui termine la démonstration du lemme 2.22. □

À partir de là, on termine en reprenant l'argument de *ibid.*, théorème 4.6. Ceci met fin à la preuve de la proposition 2.21. □

Compte tenu de ce qui précède, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.23. — *Tout élément non nul de $\mathcal{H}(\mathrm{G},\lambda)$ supporté par une double classe $\mathrm{J}y\mathrm{J}$, avec $y \in \mathrm{I}_{\mathrm{G}}(\lambda)$, est inversible.*

2.6. Paires couvrantes

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques faits concernant la théorie des paires couvrantes. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [**9, 32**]. On fixe $m \geqslant 1$ et on pose $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$.

2.6.1. Soit τ une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact K de G. Il lui correspond la R-algèbre $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathrm{G}, \tau)$ définie au paragraphe 1.5 et le foncteur :

$$\mathbf{M}_\tau : \sigma \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\tau, \sigma) \tag{2.21}$$

de $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ vers la catégorie des $\mathcal{H}$-modules à droite. Par réciprocité de Frobenius, celui-ci s'identifie au foncteur $\sigma \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau), \sigma)$.

2.6.2. Soit M un sous-groupe de Levi de G et soit τ_{M} une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact K_{M} de M. Soit P un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M et soient U et U^- respectivement son radical unipotent et le radical unipotent opposé à U par rapport à M.

Définition 2.24. — On dit que (K, τ) est une paire P-*couvrante* de $(\mathrm{K}_{\mathrm{M}}, \tau_{\mathrm{M}})$ si :

(1) on a l'égalité $\mathrm{K}_{\mathrm{M}} = \mathrm{K} \cap \mathrm{M}$ et une décomposition d'Iwahori :

$$\mathrm{K} = (\mathrm{K} \cap \mathrm{U}^-) \cdot (\mathrm{K} \cap \mathrm{M}) \cdot (\mathrm{K} \cap \mathrm{U}) \ ;$$

(2) la restriction de τ à K_{M} est égale à τ_{M} et les sous-groupes $\mathrm{K} \cap \mathrm{U}^-$ et $\mathrm{K} \cap \mathrm{U}$ sont contenus dans le noyau de τ ;

(3) il existe dans le centre de M un élément z fortement P-négatif au sens de la définition 6.16 de [**9**] et tel que $\mathcal{H}$ contienne un élément inversible de support KzK.

Si (K, τ) est P-couvrante pour tout sous-groupe parabolique P de G de facteur de Levi M, on dit simplement que c'est une paire couvrante.

Remarque 2.25. — L'algèbre de Hecke utilisée dans [**9**] est l'algèbre de Hecke associée à la contragrédiente $(\mathrm{K}, \tau^\vee)$. Elle est opposée à $\mathcal{H}$ (voir *ibid.*, 2.3) ce qui explique que z est supposé négatif (et non pas positif) dans la condition 3.

Exemple 2.26. — On reprend les notations de l'exemple 2.10, et on note M le sous-groupe de Levi de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ constitué des matrices diagonales. Alors le couple $(\mathrm{I}, 1_{\mathrm{I}})$ est une paire couvrante de $(\mathrm{I} \cap \mathrm{M}, 1_{\mathrm{I} \cap \mathrm{M}})$.

2.6.3. On suppose que (K, τ) est une paire couvrante de $(\mathrm{K}_{\mathrm{M}}, \tau_{\mathrm{M}})$. On a fixé au paragraphe 1.3 une racine carrée de q dans R. Il lui correspond un homomorphisme injectif de R-algèbres :

$$j_{\mathrm{P}} : \mathcal{H}(\mathrm{M}, \tau_{\mathrm{M}}) \to \mathcal{H}(\mathrm{G}, \tau) \tag{2.22}$$

faisant de $\mathcal{H}$ un module à gauche sur $\mathcal{H}_{\mathrm{M}} = \mathcal{H}(\mathrm{M}, \tau_{\mathrm{M}})$ (voir [**32**, II.10] : pour la raison donnée à la remarque 2.25, l'homomorphisme j_{P} préserve les supports des fonctions de $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$ supportées par les éléments P-négatifs de M, et non pas P-positifs comme dans [**9**]). Cet homomorphisme définit un foncteur de restriction, noté $\boldsymbol{j}_{\mathrm{P}}^*$, de la catégorie des $\mathcal{H}$-modules à droite vers la catégorie des $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-modules à droite. Pour toute représentation σ de G, la projection naturelle de σ vers son module de Jacquet $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ induit un isomorphisme :

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{P}}^* \left(\mathbf{M}_\tau(\sigma)\right) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{M}_{\tau_{\mathrm{M}}} \left(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)\right) \tag{2.23}$$

de $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-modules à droite (voir [**32**, II.10.1]).

Remarque 2.27. — On déduit de (2.23) que, si une représentation σ de G contient une paire couvrante, alors $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ est non nul. En particulier, si une représentation irréductible σ de G contient une paire couvrante pour $\mathrm{M} \neq \mathrm{G}$, alors σ n'est pas cuspidale.

D'après Blondel [**1**, II] (voir aussi Dat [**12**, 2]), on a un isomorphisme :

$$\Phi_{\mathrm{P}} : \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau) \to \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{M}}(\tau_{\mathrm{M}})\right), \quad \Phi_{\mathrm{P}}(f)(g)(x) = \int\limits_{\mathrm{U}} f(uxg)\, du, \tag{2.24}$$

de représentations de G et de $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-modules à gauche, où du est la mesure de Haar sur U normalisée de telle sorte que $\mathrm{K} \cap \mathrm{U}$ soit de volume 1, avec $f \in \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)$, $g \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{M}$.

Proposition 2.28. — *Soit σ une représentation de* M *engendrée par sa composante τ_{M}-isotypique. Alors l'induite $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ est engendrée par sa composante τ-isotypique.*

Démonstration. — Par hypothèse, σ est quotient d'une somme directe de copies de $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{M}}(\tau_{\mathrm{M}})$, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble S et un homomorphisme surjectif de représentations de M :

$$\bigoplus_{\mathrm{S}} \mathrm{ind}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{M}}(\tau_{\mathrm{M}}) \to \sigma.$$

Si l'on applique le foncteur exact $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}$ (qui commute aux sommes directes arbitraires) et la formule (2.24), on voit que l'induite parabolique $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ est un quotient d'une somme de copies de $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)$, c'est-à-dire qu'elle est engendrée par sa composante τ-isotypique. □

2.7. Types semi-simples

Soit A la F-algèbre centrale simple $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ et soit $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$.

2.7.1. Soit $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme m. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\alpha$. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, soit $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$ un type simple maximal de G_{m_i}. On pose :

$$\mathrm{J}_{\mathrm{M}} = \mathrm{J}_1 \times \cdots \times \mathrm{J}_r \tag{2.25}$$

et on note λ_{M} la représentation $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r$ de J_{M}.

Définition 2.29. — Un couple de la forme $(\mathrm{J}_{\mathrm{M}}, \lambda_{\mathrm{M}})$ est appelé un R-*type simple maximal de* M.

Pour chaque entier i, on fixe une strate simple $[\mathfrak{A}_i, n_i, 0, \beta_i]$ de $\mathscr{M}_{m_i}(\mathrm{D})$ et un caractère simple $\theta_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_i, 0, \beta_i)$ contenu dans λ_i, et on suppose que $\mathfrak{A}_i$ est standard. De ce fait, on a $\mathrm{J}_i = \mathrm{J}(\beta_i, \mathfrak{A}_i)$ et le quotient de ce groupe par $\mathrm{J}_i^1 = \mathrm{J}^1(\beta_i, \mathfrak{A}_i)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_{s_i}(\mathfrak{k}_i)$, pour un certain entier $s_i \geqslant 1$ et une certaine extension $\mathfrak{k}_i$ de $\mathfrak{k}_{\mathrm{F}}$. On pose $\mathrm{J}_{\mathrm{M}}^1 = \mathrm{J}_1^1 \times \cdots \times \mathrm{J}_r^1$.

On fixe une suite de $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$-réseaux $\mathscr{L}$ de D^m (voir [**29**, Definition 1.1]) satisfaisant aux conditions de *ibid.*, §7.2. D'après *loc. cit.*, ces données définissent des sous-groupes ouverts compacts :

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}(\mathscr{L}), \quad \mathrm{K}^1 = \mathrm{K}^1(\mathscr{L}) = \mathrm{K} \cap \mathrm{U}^1(\mathscr{L}), \tag{2.26}$$

de G possédant les propriétés suivantes :

(1) K et K^1 admettent une décomposition d'Iwahori par rapport à $(\mathrm{M}, \mathrm{P}')$, pour tout sous-groupe parabolique P' de G de facteur de Levi M ;

(2) on a $\mathrm{K} \cap \mathrm{M} = \mathrm{J}_{\mathrm{M}}$ et $\mathrm{K}^1 \cap \mathrm{M} = \mathrm{J}_{\mathrm{M}}^1$;

(3) K^1 est un pro-p-sous-groupe distingué de K et :

$$\mathrm{K}/\mathrm{K}^1 \simeq \mathrm{J}_{\mathrm{M}}/\mathrm{J}^1_{\mathrm{M}} \simeq \mathrm{GL}_{s_1}(\mathfrak{k}_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_r}(\mathfrak{k}_r). \tag{2.27}$$

Il existe donc une unique représentation τ de K prolongeant λ_{M}, définie par la formule :

$$\tau(uxu') = \lambda_{\mathrm{M}}(x), \quad u \in \mathrm{K} \cap \mathrm{U}^-,\ x \in \mathrm{K} \cap \mathrm{M},\ u' \in \mathrm{K} \cap \mathrm{U}. \tag{2.28}$$

2.7.2. On suppose que tous les caractères simples $\theta_1, \dots, \theta_r$ sont endo-équivalents [**4**]. Il suffira de savoir ici que, sous cette condition, on peut supposer que les β_i sont tous égaux à un même β et que les θ_i sont transferts les uns des autres. On note $\mathfrak{A}$ l'ordre standard de $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ dont les blocs diagonaux sont les $\mathfrak{A}_i$, $i \in \{1, \dots, r\}$ et on note $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ le transfert de θ_i (qui ne dépend pas du choix de i). On pose $\mathrm{E} = \mathrm{F}(\beta)$. Dans ce cas, on a (voir [**29**, 7.1]) :

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}(\mathfrak{A}) = \mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A})(\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{P}), \quad \mathrm{K}^1 = \mathrm{K}^1(\mathfrak{A}) = \mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A})(\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{P}). \tag{2.29}$$

On fixe une β-extension κ de θ et on note $\varkappa$ la représentation de K sur l'espace des vecteurs $\mathrm{K} \cap \mathrm{U}$-invariants de κ. Sa restriction à J_{M} est de la forme $\kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_r$, où κ_i est une β-extension de θ_i. Pour $i = 1, \dots, r$, on écrit λ_i sous la forme $\kappa_i \otimes \sigma_i$. On réunit les σ_i suivant leur classe de conjugaison sous $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}/\mathfrak{k}_{\mathrm{E}})$, ce qui définit une partition :

$$\{1, \dots, r\} = \mathrm{I}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{I}_u$$

avec $u \geqslant 1$, puis un sous-groupe de Levi L de G contenant M, qu'on écrit $\mathrm{L}_1 \times \cdots \times \mathrm{L}_u$, où chaque L_j est isomorphe à G_{r_j} pour un certain $r_j \geqslant 1$.

Remarque 2.30. — Quitte à conjuguer chaque $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$, $i \in \mathrm{I}_j$, par un élément convenable de G_{m_i}, on peut supposer que les σ_i, $i \in \mathrm{I}_j$, sont tous isomorphes, et donc que l'entier m_i, la strate $[\mathfrak{A}_i, n_i, 0, \beta_i]$, le caractère θ_i et la β-extension κ_i ne dépendent pas de $i \in \mathrm{I}_j$. C'est ce qu'on fait dans la suite du paragraphe.

On note σ la représentation $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$ considérée comme représentation de K triviale sur K^1. Remarquons que $\tau = \varkappa \otimes \sigma$ et que K est un sous-groupe de $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$.

Proposition 2.31. — *On suppose que tous les* $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$ *sont égaux à un même type simple maximal* $(\mathrm{J}_1, \lambda_1)$*. Alors* (K, τ) *est une paire couvrante de* $(\mathrm{J}_{\mathrm{M}}, \lambda_{\mathrm{M}})$*, et l'application :*

$$\lambda_1 \mapsto \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{J}}(\tau) \tag{2.30}$$

induit une bijection de $\mathcal{T}(\theta_1)$ *dans* $\mathcal{T}(\theta)$ *(voir les notations du paragraphe 2.5.1).*

Démonstration. — L'hypothèse sur les $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$ implique que $u = 1$, c'est-à-dire que $\mathrm{L} = \mathrm{G}$. On procède comme dans [**26**, 5.2.3] au moyen de la proposition 2.6 et du corollaire 2.23. □

Exemple 2.32. — On reprend les notations de l'exemple 2.26 et on identifie M à $\mathrm{D}^{\times m}$. Si l'on choisit $(\mathrm{J}_1, \lambda_1) = (\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{\times}, 1_{\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{\times}})$, alors $\mathrm{K} = \mathrm{J} = \mathrm{I}$ et la paire couvrante lui correspondant par la proposition 2.31 est $(\mathrm{I}, 1_{\mathrm{I}})$.

Pour $j = 1, \dots, u$, on note M_j le produit des G_{m_i} pour $i \in \mathrm{I}_j$ (c'est un sous-groupe de Levi de L_j) et $(\mathrm{J}_{\mathrm{M}_j}, \lambda_{\mathrm{M}_j})$ le produit des $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$ pour $i \in \mathrm{I}_j$. Compte tenu de la remarque 2.30, on peut former la paire couvrante (K_j, τ_j) de $(\mathrm{J}_{\mathrm{M}_j}, \lambda_{\mathrm{M}_j})$ donnée par la proposition 2.31 (relativement à un sous-groupe parabolique P_j de L_j de facteur M_j). On pose :

$$\mathrm{K}_{\mathrm{L}} = \mathrm{K}_1 \times \cdots \times \mathrm{K}_u, \quad \tau_{\mathrm{L}} = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_u.$$

Par construction, $(\mathrm{K}_{\mathrm{L}}, \tau_{\mathrm{L}})$ est une paire couvrante de $(\mathrm{J}_{\mathrm{M}}, \lambda_{\mathrm{M}})$.

Proposition 2.33. — (1) (K, τ) *est une paire couvrante de* $(\mathrm{K_L}, \tau_\mathrm{L})$*, et donc de* $(\mathrm{J_M}, \lambda_\mathrm{M})$*.*
(2) *La restriction à* L *définit un isomorphisme de* R*-algèbres de* $\mathcal{H}(\mathrm{G}, \tau)$ *sur* $\mathcal{H}(\mathrm{L}, \tau_\mathrm{L})$*.*

Démonstration. — Dans le cas complexe, le résultat est donné par [**29**, Proposition 8.1]. On reprend la preuve de [**28**, Proposition 5.17], dans laquelle (K, τ) est notée $(\mathrm{J_P}, \vartheta_\mathrm{P})$. Pour le calcul de $\mathrm{I_G}(\tau)$, on remplace [**17**, Proposition 1.2] par le lemme 2.11. La preuve de [**28**, Théorème 5.10] (dans laquelle $\varkappa$ est notée κ_P) est encore valable, quitte à remplacer [**8**, Proposition 5.1.8] par [**28**, Proposition 5.5(ii)], qui est encore vraie dans le cas modulaire puisque K^1 (noté J^1_P) est un pro-p-groupe. Aussi a-t-on :

$$\mathrm{I_G}(\tau) \subseteq \mathrm{K} \cdot (\mathrm{L} \cap \mathrm{B}^\times) \cdot \mathrm{K},$$

de sorte que la restriction de G à L définit un isomorphisme de R-algèbres de $\mathcal{H}(\mathrm{G}, \tau)$ sur $\mathcal{H}(\mathrm{L}, \tau_\mathrm{L})$ (voir [**32**, II.8]). Le reste de la preuve se fait comme dans [**28**, Proposition 5.17]. En particulier, l'argument de [**10**, Lemma 3.9] est encore valable, la constante c est égale à l'indice de $\mathrm{K} \cap \zeta^{-1}\mathrm{K}\zeta$ dans K (avec les notations de *loc. cit.*), qui est une puissance de p grâce à la décomposition d'Iwahori de K. □

2.7.3. On réunit les caractères simples θ_i suivant leur classe d'endo-équivalence (voir [**4**]), ce qui définit une partition :

$$\{1, \dots, r\} = \mathrm{I}_1 \cup \dots \cup \mathrm{I}_t, \quad t \geqslant 1, \tag{2.31}$$

puis un sous-groupe de Levi S de G contenant M, qu'on écrit $\mathrm{S}_1 \times \dots \times \mathrm{S}_t$. D'après le paragraphe 2.7.2, il correspond à chaque $k = 1, \dots, t$ une partition $\mathrm{I}_{k,1} \cup \dots \cup \mathrm{I}_{k,u_k}$ de I_k et une extension finie F'_k de F. On note $n_{k,j}$ le cardinal de $\mathrm{I}_{k,j}$ et on pose :

$$\mathrm{G}' = \prod_{k=1}^{t} \prod_{j=1}^{u_k} \mathrm{GL}_{n_{k,j}}(\mathrm{F}'_k). \tag{2.32}$$

Pour $k \in \{1, \dots, t\}$, on forme la paire couvrante (K_k, τ_k) donnée par la proposition 2.33 à partir des $(\mathrm{J}_i, \lambda_i)$, $i \in \mathrm{I}_k$. On pose :

$$\mathrm{K_S} = \mathrm{K}_1 \times \dots \times \mathrm{K}_t, \quad \tau_\mathrm{S} = \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_t.$$

Par construction, $(\mathrm{K_S}, \tau_\mathrm{S})$ est une paire couvrante de $(\mathrm{J_M}, \lambda_\mathrm{M})$. On note I' le sous-groupe d'Iwahori standard de G', qui est le produit des sous-groupes d'Iwahori standards de $\mathrm{GL}_{n_{k,j}}(\mathrm{F}'_k)$.

Proposition 2.34. — (1) (K, τ) *est une paire couvrante de* $(\mathrm{K_S}, \tau_\mathrm{S})$*, donc de* $(\mathrm{J_M}, \lambda_\mathrm{M})$*.*
(2) *La restriction à* S *définit un isomorphisme de* R*-algèbres de* $\mathcal{H}(\mathrm{G}, \tau)$ *sur* $\mathcal{H}(\mathrm{S}, \tau_\mathrm{S})$*, et on a un isomorphisme de* R*-algèbres :*

$$\Psi : \mathcal{H}(\mathrm{G}', \mathrm{I}') \to \mathcal{H}(\mathrm{G}, \tau)$$

préservant les supports.

Démonstration. — Dans le cas complexe, le résultat est donné par [**29**, Theorem 8.2]. On reprend la preuve de [**28**, Corollaire 4.6], dans laquelle la paire (K, τ) est notée $(\tilde{\mathrm{K}}, \varrho)$. L'argument de [**10**, Corollary 6.6] est encore valable, la constante c est égale à l'indice de $\tilde{\mathrm{K}} \cap \zeta^{-1}\tilde{\mathrm{K}}\zeta$ dans $\tilde{\mathrm{K}}$ (avec les notations de *loc. cit.*), qui est une puissance de p grâce à la décomposition d'Iwahori de $\tilde{\mathrm{K}}$. □

2.7.4. On définit maintenant la notion de type semi-simple.

Définition 2.35. — Un *type semi-simple* de G est une paire couvrante (K,τ) d'un type simple maximal d'un sous-groupe de Levi de G, définie par la proposition 2.34.

C'est cohérent avec la définition 2.8, c'est-à-dire qu'un type semi-simple de niveau 0 de G est un type semi-simple au sens de la définition 2.35.

Remarque 2.36. — Un type semi-simple associé par la proposition 2.34 à un type simple maximal d'un sous-groupe de Levi M (définition 2.29) est simple si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

(1) On a $\mathrm{M}=\mathrm{G}$, auquel cas ce type semi-simple est simple maximal.

(2) La paire $(\mathrm{J}_\mathrm{M},\lambda_\mathrm{M})$ dont ce type semi-simple est une paire couvrante est, à conjugaison près par M, de la forme $\lambda_\mathrm{M}=\lambda_0\otimes\cdots\otimes\lambda_0$ avec λ_0 un type simple maximal de niveau 0, auquel cas on est dans la situation de la proposition 2.31 avec $\mathrm{J}=\mathrm{K}$.

Proposition 2.37. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale de* G. *Si π contient un type semi-simple, alors ce type semi-simple est simple maximal.*

Démonstration. — D'après la remarque 2.27, ce type semi-simple ne peut pas être une paire couvrante relativement à un sous-groupe de Levi propre de G. Par conséquent, il est donné par la proposition 2.31 avec $\mathrm{M}=\mathrm{G}$. C'est donc un type simple maximal. $\square$

2.8. Réduction des types simples et semi-simples

Soit ℓ un nombre premier différent de p, et soit $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ une strate simple de A. On fixe des homomorphismes $\iota_{p,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ et $\iota_{p,\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ (voir le paragraphe 2.2) tels que, pour tout $x\in\mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$, l'image de $\iota_{p,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(x)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ soit égale à $\iota_{p,\overline{\mathbb{F}}_\ell}(x)$.

2.8.1. On pose $\mathrm{J}=\mathrm{J}(\beta,\mathfrak{A})$, $\mathrm{J}^1=\mathrm{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ et $\mathrm{H}^1=\mathrm{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$.

Proposition 2.38. — *Pour tout entier $0\leqslant m\leqslant -k_0(\beta,\mathfrak{A})-1$, la réduction modulo ℓ définit une bijection de $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A},m,\beta)$ vers $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A},m,\beta)$.*

On appellera *relèvement* d'un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère simple $\theta\in\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A},m,\beta)$ son image réciproque dans $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A},m,\beta)$ par cette bijection.

Proposition 2.39. — *Soit $\theta\in\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A},0,\beta)$ un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère simple, soit $\tilde\theta$ le relèvement de θ à $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A},0,\beta)$ et soit $\tilde\kappa$ une β-extension de $\tilde\theta$.*

(1) *Si $\mathfrak{k}$ est une structure entière de $\tilde\kappa$, alors $\mathfrak{k}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ est une β-extension de θ.*

(2) *L'homomorphisme de réduction $\mathbf{r}_\ell$ induit une surjection de $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde\theta)$ sur $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\theta)$.*

Démonstration. — La preuve est analogue à celle donnée dans [**31**, III.4.18]. On note κ la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation $\mathfrak{k}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de J. La restriction de $\tilde\kappa$ à H^1 est un multiple de $\tilde\theta$, donc la restriction de κ à H^1 est un multiple de θ. La restriction de κ au pro-p-groupe J^1 contient donc et est de même dimension que la représentation de Heisenberg η. Enfin, d'après [**31**, Lemme I.9.8], l'entrelacement de κ dans G est égal à $\mathrm{JB}^\times\mathrm{J}$. C'est donc une β-extension de θ.

Soit maintenant κ' une β-extension de θ. D'après le lemme 2.4, il existe un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère χ de $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}^\times$ tel que κ soit isomorphe à κ'^χ, c'est-à-dire que $\mathbf{r}_\ell(\tilde\kappa)$ est égale à κ'^χ. Si l'on note α le relèvement de Teichmüller de χ^{-1}, alors l'image de $\tilde\kappa'^\alpha$ par $\mathbf{r}_\ell$ est κ'. □

Remarque 2.40. — Deux β-extensions de $\tilde\theta$ ont des réductions mod ℓ isomorphes si et seulement si elles sont tordues l'une de l'autre par un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère d'ordre une puissance de ℓ.

2.8.2. Soient $\mathfrak{k}$ un corps fini de caractéristique p et $\bar{\mathfrak{k}}$ une clôture algébrique de $\mathfrak{k}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathfrak{k}_n$ l'extension de $\mathfrak{k}$ de degré n contenue dans $\bar{\mathfrak{k}}$. Si R est $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, on note $\mathrm{X}_n(\mathrm{R})$ l'ensemble des R-caractères de $\mathfrak{k}_n^\times$ dont l'orbite sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$ est de cardinal n. D'après Green [**18**], on a une correspondance surjective :

$$\tilde\chi \mapsto \boldsymbol{\sigma}(\tilde\chi) \tag{2.33}$$

de $\mathrm{X}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ vers l'ensemble des classes de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{k})$, et l'ensemble des antécédents de $\boldsymbol{\sigma}(\tilde\chi)$ par (2.33) est l'orbite de $\tilde\chi$ sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$.

Théorème 2.41 **(James [20])**. — *Soit un entier $n \geqslant 1$.*

(1) *Pour tout $\tilde\chi \in \mathrm{X}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, la représentation $\mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\sigma}(\tilde\chi))$ est irréductible et cuspidale, et elle ne dépend que de la réduction modulo ℓ de $\tilde\chi$.*

(2) *On a une correspondance surjective :*

$$\chi \mapsto \boldsymbol{\sigma}(\chi) = \mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\sigma}(\tilde\chi)) \tag{2.34}$$

de l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractères χ de $\mathfrak{k}_n^\times$ admettant un relèvement dans $\mathrm{X}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ vers l'ensemble des classes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{k})$; l'ensemble des antécédents de $\boldsymbol{\sigma}(\chi)$ est l'orbite de χ sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$.

(3) *La représentation $\boldsymbol{\sigma}(\chi)$ est supercuspidale si et seulement si $\chi \in \mathrm{X}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$.*

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.42. — *Soit $(\mathrm{U}(\mathfrak{A}), \tilde\sigma)$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple de niveau 0 de G, où $\mathfrak{A}$ est un ordre héréditaire de G.*

(1) *Si $\mathfrak{s}$ est une structure entière de $\tilde\sigma$, alors $\mathfrak{s} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-type simple de niveau 0 de G.*

(2) *L'homomorphisme de réduction $\mathbf{r}_\ell$ induit une surjection de $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A})$ sur $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A})$.*

Démonstration. — En considérant un type simple de niveau 0 comme une représentation du quotient $\mathrm{U}(\mathfrak{A})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$, on se ramène au problème de la réduction des représentations irréductibles cuspidales du groupe fini $\mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}})$ avec $s \geqslant 1$. □

2.8.3. On réduit maintenant les types simples et semi-simples.

Proposition 2.43. — *Soit $\theta \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère simple et soit $\tilde\theta$ le relèvement de θ à $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$.*

(1) *Si $\mathfrak{l}$ est une structure entière d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple contenant $\tilde\theta$, alors $\mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-type simple contenant θ.*

(2) *L'homomorphisme de réduction $\mathbf{r}_\ell$ induit une surjection de $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde\theta)$ sur $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\theta)$.*

Démonstration. — On fixe un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple $\tilde\lambda$ contenant $\tilde\theta$, qu'on écrit $\tilde\kappa \otimes \tilde\sigma$. Si $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{s}$ sont des structures entières de $\tilde\kappa$ et $\tilde\sigma$ respectivement, $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{s}$ est une structure entière de $\tilde\lambda$. Le résultat est alors une conséquence des propositions 2.39 et 2.42. □

La proposition 2.43 montre que l'existence des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-types simples se déduit de celle des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-types simples prouvée dans [**24, 25**]. On termine cette section par le résultat suivant.

Proposition 2.44. — *Soit* M *un sous-groupe de Levi de* G*, soit* $(\mathrm{J_M}, \lambda_\mathrm{M})$ *un* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-type simple maximal de* M *et soit* $(\mathrm{J_M}, \tilde{\lambda}_\mathrm{M})$ *un* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-type simple maximal de* M *relevant* $(\mathrm{J_M}, \lambda_\mathrm{M})$*.*

(1) *Si* $\mathfrak{t}$ *est une structure entière d'un* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-type semi-simple de* G *associé à* $(\mathrm{J_M}, \tilde{\lambda}_\mathrm{M})$*, alors* $\mathfrak{t} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ *est un* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-type semi-simple de* G *associé à* $(\mathrm{J_M}, \lambda_\mathrm{M})$*.*

(2) *Pour tout* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-type semi-simple* (K, τ) *de* G *associé à* $(\mathrm{J_M}, \lambda_\mathrm{M})$*, il existe un* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-type semi-simple de* G *associé à* $(\mathrm{J_M}, \tilde{\lambda}_\mathrm{M})$ *dont la réduction modulo* ℓ *soit isomorphe à* τ*.*

3. Représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$

Soit $m \geqslant 1$ un entier et soit $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Dans cette section, on effectue la classification des représentations irréductibles cuspidales de G en termes de types simples maximaux (théorème 3.4). Ceci a été fait par Bushnell-Kutzko [**8**] et Sécherre-Stevens [**28**] dans le cas complexe et par Vignéras [**31**] pour $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ dans le cas modulaire. Cette classification permet d'associer certains invariants à une représentation irréductible cuspidale de G (paragraphe 3.4).

On étudie ensuite les problèmes de la réduction et du relèvement des représentations irréductibles cuspidales de G. On montre que, contrairement au cas déployé traité dans [**31**], une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de G ne se réduit pas toujours en une représentation irréductible (théorème 3.15) et qu'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de G n'admet pas toujours un relèvement (paragraphe 3.6). Néanmoins, on prouve que toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible supercuspidale admet un relèvement (voir le théorème 3.26), et on donne dans le cas où D est commutative une nouvelle preuve du théorème de Vignéras selon lequel la réduction modulo ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière est irréductible (corollaire 3.18 et remarque 3.19).

3.1. Types simples maximaux

Soient (J, λ) un type simple maximal de $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$ et $\mathrm{N} = \mathrm{N_G}(\lambda)$ son normalisateur dans G.

Proposition 3.1. — *Pour toute représentation* Λ *prolongeant* λ *à* N*, l'induite* $\mathrm{ind}_\mathrm{N}^\mathrm{G}(\Lambda)$ *est une représentation irréductible cuspidale de* G*. En outre, l'application :*

$$\Lambda \mapsto \mathrm{ind}_\mathrm{N}^\mathrm{G}(\Lambda) \tag{3.1}$$

induit une bijection entre prolongements de λ *à* N *et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de* G *contenant* λ*.*

Démonstration. — La preuve s'inspire de [**33**] mais des modifications doivent être apportées. Soit (J, λ) un type simple de G, qu'on décompose sous la forme $\lambda = \kappa \otimes \sigma$, et soit Λ une représentation de N prolongeant λ. Puisque l'entrelacement de Λ dans G est égal à N (remarque 2.20), la R-algèbre des endomorphismes de $\mathrm{ind}_\mathrm{N}^\mathrm{G}(\Lambda)$ est isomorphe à R.

Lemme 3.2. — *La représentation de* N *sur la composante* η*-isotypique de* $\mathrm{ind}_\mathrm{N}^\mathrm{G}(\Lambda)$ *est isomorphe à la somme directe des* Λ^n*, avec* $n \in \mathrm{N}_{\mathrm{B}^\times}(\mathrm{U})\mathrm{J}/\mathrm{N}$*.*

Remarque 3.3. — Dans le cas où $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, les groupes $\mathrm{N}_{\mathrm{B}^\times}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{N}_{\mathrm{B}^\times}(\sigma)$ sont égaux, de sorte que la représentation de N sur la composante η-isotypique de $\mathrm{ind}_\mathrm{N}^\mathrm{G}(\Lambda)$ est irréductible et isomorphe à Λ : voir [**33**, Corollary 8.4].

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve de [**33**, Proposition 8.3] en prenant garde à la différence entre le $B^{\times}$-normalisateur de U et celui de σ : la composante η-isotypique de $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda)$ se décompose en la somme directe des $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1\cap\mathrm{N}^g}(\eta,\Lambda^g)$ pour g décrivant un système de représentants de G modulo $(\mathrm{N},\mathrm{J}^1)$. Par cuspidalité de σ, ces espaces sont nuls sauf pour $g\in\mathrm{N}_{\mathrm{B}^\times}(\mathrm{U})\mathrm{J}^1$. Le résultat s'ensuit. □

On pose maintenant $\mathrm{N}^\circ=\mathrm{N}_{\mathrm{B}^\times}(\mathrm{U})\mathrm{J}$, et on a le corollaire suivant au lemme 3.2.

Corollaire 3.4. — *La représentation de* N° *sur la composante η-isotypique de* $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda)$*, notée* Λ°*, est irréductible et isomorphe à l'induite de* Λ *à* N°*.*

Pour appliquer le critère d'irréductibilité [**33**, 4.2], il s'agit de montrer que, pour tout quotient irréductible π de $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda)$, la représentation Λ° est un quotient de la restriction de π à N°. Soit π un tel quotient irréductible ; puisque l'induite compacte de Λ° à G est isomorphe à $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda)$, la restriction de π à N° contient Λ. Par ailleurs, puisque J^1 est un pro-p-groupe, la composante η-isotypique de π est un quotient de celle de $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda)$ comme représentation de N°, qui est isomorphe à Λ° d'après le corollaire 3.4. Mais c'est aussi un facteur direct de la restriction de π à J^1 (qui est semi-simple), de sorte que π a la propriété attendue. Enfin, $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda)$ est cuspidale, puisque ses coefficients sont à support compact modulo le centre de G (voir [**31**, II.2.7]).

Il ne reste qu'à prouver que (3.1) est bijective. Notons Z le centre de G et fixons un caractère $\omega:\mathrm{Z}\to\mathrm{R}^\times$ dont la restriction à $\mathrm{J}\cap\mathrm{Z}$ coïncide avec le caractère par lequel agit $\lambda|_{\mathrm{J}\cap\mathrm{Z}}$. On note λ_ω l'unique représentation de JZ prolongeant λ et de caractère central ω. On va prouver que (3.1) induit une bijection entre prolongements de λ_ω à N et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de G contenant λ_ω. Par un argument similaire à celui de [**31**, III.4.27], la représentation λ_ω admet un prolongement Λ à N et l'application $\chi\mapsto\Lambda\chi$ est une bijection entre les caractères de N triviaux sur JZ et les prolongements de λ_ω à N. On en déduit que (3.1) est injective. Si maintenant ρ est une représentation irréductible cuspidale de G contenant λ_ω, alors ρ est un quotient de $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda\otimes\mathrm{R}[\mathrm{N}/\mathrm{JZ}])$. Il existe donc un caractère χ de N trivial sur JZ tel que ρ soit un quotient de (et donc soit isomorphe à) $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda\chi)$. Ceci met fin à la démonstration de la proposition 3.1. □

Un couple de la forme (N,Λ) produit à partir d'un type simple maximal (J,λ) de G est appelé un *type simple maximal étendu* de G.

3.2. Représentations cuspidales de niveau 0

Rappelons qu'une représentation irréductible de G est de niveau 0 s'il existe un $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de $\mathrm{A}=\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ tel qu'elle possède un vecteur non nul invariant par $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$.

Théorème 3.5. — *Toute représentation irréductible cuspidale de niveau* 0 *de* G *contient un type simple maximal de niveau* 0*.*

Démonstration. — Soit ρ une représentation irréductible cuspidale de niveau 0 de G, et soit $\mathfrak{A}$ un ordre héréditaire minimal parmi ceux pour lesquels ρ a des vecteurs invariants par $\mathrm{U}^1=\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$, que l'on peut supposer standard. On pose $\mathrm{U}=\mathrm{U}(\mathfrak{A})$. On a un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{U}/\mathrm{U}^1\to\mathrm{GL}_{m_1}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}})\times\cdots\times\mathrm{GL}_{m_r}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}}),\tag{3.2}$$

où $r\geqslant 1$ est la période de $\mathfrak{A}$ et les m_i des entiers dont la somme est égale à m. De cette façon, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}}/\mathfrak{k}_{\mathrm{F}})$ opère sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de U/U^1.

Lemme 3.6. — *Il existe une représentation irréductible* σ *de* U *triviale sur* U^1 *telle que* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}}(\sigma,\rho)\neq 0$, *et qui est cuspidale en tant que représentation de* U/U^1.

Démonstration. — L'existence d'une représentation irréductible σ de U triviale sur U^1 telle que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}}(\sigma,\rho)\neq 0$ est donnée par le lemme 2.16. Pour prouver que σ est cuspidale en tant que représentation de U/U^1, on peut reprendre l'argument de [**31**, III.3.2]. □

Fixons une représentation σ de U satisfaisant aux conditions du lemme 3.6. Le couple (U,σ) est un type semi-simple. D'après la proposition 2.37, puisque ce type semi-simple apparaît dans une représentation cuspidale, c'est un type simple maximal, ce qui met fin à la démonstration du théorème 3.5. □

3.3. Représentations cuspidales de niveau non nul

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.7. — *Toute représentation irréductible cuspidale de niveau non nul de* G *contient un type simple maximal de niveau non nul.*

Soit ρ une représentation irréductible cuspidale de niveau non nul de G. Dans un premier temps, il s'agit de montrer que ρ contient un caractère simple. Comme au paragraphe 2.2, on fixe un homomorphisme injectif $\iota_{p,\mathrm{R}}$ du groupe des racines complexes de l'unité d'ordre une puissance de p vers $\mathrm{R}^\times$ et un caractère $\psi_{\mathrm{F},\mathbb{C}}:\mathrm{F}\to\mathbb{C}^\times$ trivial sur $\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}$ mais pas sur $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$. À une strate $[\mathfrak{A},n,n-1,\beta]$ de $\mathrm{A}=\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ correspond le caractère :

$$\psi_\beta : x\mapsto \iota_{p,\mathrm{R}}\circ\psi_{\mathrm{F},\mathbb{C}}\circ\mathrm{tr}_{\mathrm{A}/\mathrm{F}}(\beta(x-1)) \tag{3.3}$$

du sous-groupe ouvert compact $\mathrm{U}^n(\mathfrak{A})$.

Lemme 3.8. — *Il existe une strate simple* $[\mathfrak{A},n,n-1,\beta]$ *de* A *telle que la restriction de* ρ *à* $\mathrm{U}^n(\mathfrak{A})$ *contienne* ψ_β.

Démonstration. — La démonstration de Broussous [**3**] dans le cas complexe, elle-même inspirée de celle de Bushnell et Kutzko [**10**] concernant $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, s'adapte ici. Rappelons-en les principales étapes.

(1) D'abord, on montre que toute représentation de G de niveau non nul contient une strate fondamentale au sens de [**28**, Définition 3.9].

(2) Ensuite, on montre qu'une représentation de G de niveau non nul contenant une strate fondamentale scindée (au sens de [**28**, Définition 3.9]) a un module de Jacquet non nul relativement à un sous-groupe parabolique propre de G.

(3) Enfin, on montre que toute représentation de G de niveau non nul contenant une strate fondamentale non scindée de A contient également une strate simple de A.

L'étape 1 (voir par exemple [**19**]) repose sur [**3**, Proposition 1.2.2] qui ne dépend pas du corps R. L'étape 2 repose principalement sur les propositions 2.3.2 et 2.4.3 de [**3**] (qui correspondent respectivement au théorème 3.7 et au lemme 3.9 de [**10**]) ; la première est indépendante du corps R, et la preuve de la seconde reste valable dans le cas modulaire. L'étape 3 repose sur [**3**, Théorème 1.2.5], qui ne dépend pas du corps R. □

Lemme 3.9. — *Il existe une strate simple* $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ *de* A *et un caractère simple* θ *dans* $\mathcal{C}(\beta,0,\mathfrak{A})$ *tels que la restriction de* ρ *à* $\mathrm{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$ *contienne* θ.

Démonstration. — La démonstration de [**28**] dans le cas complexe s'adapte ici. Il s'agit de prouver que, si le résultat n'est pas vrai, ρ contient ou bien une strate scindée, ou bien un caractère scindé au sens de la définition 3.22 de [**28**], et que dans chacun de ces deux cas, ρ a un module de Jacquet non nul relativement à un sous-groupe parabolique propre, ce qui conduit à une contradiction. La première étape repose sur [**28**, Théorème 3.23], dont la preuve ne dépend pas du corps R. La seconde étape repose principalement sur le théorème 4.3 et le corollaire 4.6 de [**28**] (ce dernier correspondant à [**10**, Corollary 6.6]) ; la preuve du théorème ne dépend pas du corps R et celle du corollaire reste valable dans le cas modulaire. □

On fixe une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A et un caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\beta, 0, \mathfrak{A})$ satisfaisant à la condition du lemme 3.9, en choisissant $\mathfrak{A}$ minimal pour cette propriété. On pose $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ et $\mathrm{J}^1 = \mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$ et on fixe une β-extension κ de θ. D'après le lemme 2.16, la représentation ρ contient une sous-représentation de la forme $\kappa \otimes \sigma$, avec σ une représentation irréductible de J triviale sur J^1.

Lemme 3.10. — *En tant que représentation de* $\mathrm{J}/\mathrm{J}^1 \simeq \mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})^r$, *la représentation* σ *est cuspidale.*

Démonstration. — La preuve de [**28**, Proposition 5.15] s'adapte ici. □

La paire $(\mathrm{J}, \kappa \otimes \sigma)$ est induite à partir d'un type semi-simple donné par la proposition 2.33. D'après la proposition 2.37, c'est un type simple maximal, puisqu'il apparaît dans une représentation cuspidale. Ceci met fin à la démonstration du théorème 3.7.

3.4. Invariants associés à une représentation cuspidale

Soit un entier $m \geqslant 1$. Le théorème suivant subsume les théorèmes 3.5 et 3.7, et il les complète en fournissant une classification des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$ par la théorie des types simples.

Théorème 3.11. — *L'application :*

$$\Lambda \mapsto \mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda) \tag{3.4}$$

induit une bijection entre classes de G*-conjugaison de types simples maximaux étendus et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de* G.

Démonstration. — D'après la proposition 3.1, cette application est bien définie, et elle est surjective d'après les théorèmes 3.5 et 3.7. Pour prouver qu'elle est injective, on reprend l'argument de [**29**, Theorem 7.2]. Si (J, λ) et (J', λ') sont deux types simples maximaux contenus dans une même représentation irréductible cuspidale de G, on peut commencer par supposer que $\mathrm{J}' = \mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ et que λ et λ' sont repectivement de la forme $\kappa \otimes \sigma$ et $\kappa \otimes \sigma'$, où κ est une β-extension d'un caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ et où σ, σ' sont des représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})/\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$.

Comme λ et λ' sont contenus dans une même représentation irréductible de G, il existe un $g \in \mathrm{G}$ qui entrelace λ et λ'. En raisonnant comme dans [**8**, Proposition 5.3.2] (voir aussi [**31**, III.4.22]), on en déduit qu'il existe $x \in \mathrm{B}^\times$ qui entrelace σ et σ'. Comme ces représentations sont irréductibles et cuspidales, cela entraîne que x normalise $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$, et donc que σ et σ' sont conjuguées sous le normalisateur de $\mathfrak{B}$. On termine la démonstration en invoquant la bijectivité de l'application (3.1). □

Remarque 3.12. — Le membre droite de (3.4) est supercuspidal si et seulement si, pour une décomposition de $\Lambda|_{\mathrm{J}} = \lambda$ sous la forme $\kappa \otimes \sigma$, la représentation σ est supercuspidale comme représentation irréductible de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$ (voir [**31**, III.5.14]).

Soit ρ une représentation irréductible cuspidale de G. Il s'agit d'associer à ρ un certain nombre d'invariants. On fixe un type simple maximal (J, λ) de G contenu dans ρ. On fixe une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ le définissant, on pose $\mathrm{E} = \mathrm{F}(\beta)$ et on écrit λ sous la forme $\kappa \otimes \sigma$. On note Γ le groupe de Galois défini par (2.14).

D'après [**27**, Proposition 4.1], dont la preuve est encore valable lorsque le corps R est de caractéristique non nulle, le groupe des caractères non ramifiés χ de G tels que $\rho\chi$ soit isomorphe à ρ est un groupe fini cyclique. Son cardinal est noté :

$$n(\rho) \tag{3.5}$$

et est appelé le *nombre de torsion* de ρ. Si R est de caractéristique ℓ non nulle, cet entier est premier à ℓ. On rappelle que d désigne le degré réduit de D sur F et on note :

$$f(\rho) \tag{3.6}$$

le quotient de md par l'indice de ramification de E sur F. Si F' est une extension finie de F comme au paragraphe 2.5.4, alors son degré résiduel est égal à $f(\rho)$ (voir le lemme 3.14). On note ensuite :

$$b(\rho), s(\rho), \tag{3.7}$$

respectivement les cardinaux de l'orbite et du stabilisateur de σ sous Γ. Remarquons que $s(\rho)$ est égal à l'indice de $\mathrm{E}^\times\mathrm{J}$ dans $\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\lambda)$. En raisonnant comme dans [**27**, 4.1], on vérifie que $s(\rho)$ divise $f(\rho)$ et que, si l'on note ℓ la caractéristique de R, on a :

$$n(\rho) = \left\{ \frac{f(\rho)}{s(\rho)} \right\}_\ell, \tag{3.8}$$

où $\{a\}_\ell$ désigne le plus grand diviseur premier à ℓ d'un entier $a \geqslant 1$. Si $\ell = 0$, on convient que $\{a\}_0 = a$.

Rappelons que la classe d'inertie de ρ est l'ensemble des $[\rho\chi]$ pour χ décrivant l'ensemble des caractères non ramifiés de G.

Proposition 3.13. — *Les quantités $n(\rho)$, $f(\rho)$, $b(\rho)$, $s(\rho)$ ne dépendent que de la classe d'inertie de ρ, et pas du type simple maximal (J, λ) ni de la strate $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$.*

Démonstration. — Par définition, $n(\rho)$ ne dépend que de la classe d'inertie de ρ. Ensuite, on fixe un type simple (J', λ') contenu dans ρ, une strate simple $[\mathfrak{A}', n', 0, \beta']$ le définissant et on écrit λ' sous la forme $\kappa' \otimes \sigma'$. D'après le théorème 3.11, le type simple (J', λ') est conjugué à (J, λ) sous G. On peut donc supposer que (J', λ') est égal à (J, λ). D'après [**4**, Theorem 9.4], l'indice de ramification et le degré résiduel de E sur F ne dépendent pas du choix de la strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, c'est-à-dire qu'ils sont respectivement égaux à l'indice de ramification et au degré résiduel de $\mathrm{F}(\beta')$ sur F. L'entier $f(\rho)$ ne dépend donc pas des choix effectués, non plus que le degré réduit de D' sur E. Il reste donc à prouver que $b(\rho)$ ne dépend pas du choix de $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ni de σ. Si l'on considère σ comme une représentation de J/J^1, alors $b(\rho)$ est égal à l'indice de $\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\lambda)$ dans $\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{J})$, donc $b(\rho)$ et $s(\rho)$ ne dépendent que de la classe d'inertie de ρ. $\square$

Lemme 3.14. — *Soit* F' *une extension finie de* F *comme au paragraphe 2.5.4. Alors le cardinal du corps résiduel de* F' *est égal à* $q^{f(\rho)}$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la définition de F' et du fait que :

$$m'd'e(\mathrm{E}:\mathrm{F}) = f(\rho),$$

où d' est le degré réduit de D' sur E et $e(\mathrm{E}:\mathrm{F})$ l'ordre de ramification de E sur F. □

3.5. Réduction d'une représentation cuspidale entière

Soit ℓ un nombre premier différent de p, soit un entier $m \geqslant 1$ et soit $\tilde{\rho}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$. Soit $(\mathrm{J}, \tilde{\lambda})$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple maximal de G contenu dans $\tilde{\rho}$ et soit $\tilde{\mathrm{N}}$ son normalisateur dans G. Soit $\tilde{\Lambda}$ la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de N prolongeant $\tilde{\lambda}$ qui correpond à $\tilde{\rho}$ par la proposition 3.1, c'est-à-dire que $\tilde{\rho}$ est isomorphe à l'induite compacte de $\tilde{\Lambda}$. Puisque $\tilde{\rho}$ est entière, sa restriction à $\tilde{\mathrm{N}}$ l'est également, ainsi que $\tilde{\Lambda}$ qui en est un facteur direct.

Si $\mathfrak{l}$ est une structure entière de $\tilde{\Lambda}$, c'est aussi une structure entière de $\tilde{\lambda}$, et la représentation $\lambda = \mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-type simple maximal de G d'après la proposition 2.43. Soit N le normalisateur de λ dans G. Le groupe $\tilde{\mathrm{N}}$ est contenu dans N et, d'après la remarque 2.20(3), il est d'indice fini dans N. On note :

$$a = a(\tilde{\rho}, \ell) = \{(\mathrm{N}:\tilde{\mathrm{N}})\}_\ell \tag{3.9}$$

le plus grand diviseur de $(\mathrm{N}:\tilde{\mathrm{N}})$ premier à ℓ, c'est-à-dire le nombre de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractères du groupe cyclique $\mathrm{N}/\tilde{\mathrm{N}}$.

Théorème 3.15. — *Il y a une* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation irréductible cuspidale* ρ *de* G *telle que :*

$$\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) = \frac{(\mathrm{N}:\tilde{\mathrm{N}})}{a} \cdot \big([\rho] + [\rho\alpha] + \cdots + [\rho\alpha^{a-1}]\big) \tag{3.10}$$

dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, *où* α *est un* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-caractère non ramifié de* G *d'ordre* a.

Démonstration. — On note $\Lambda^\flat$ la représentation de $\tilde{\mathrm{N}}$ sur $\mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$. C'est un prolongement de λ à $\tilde{\mathrm{N}}$, que l'on peut prolonger à N d'après le lemme suivant.

Lemme 3.16. — *Il existe une* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation* Λ *de* N *prolongeant* $\Lambda^\flat$.

Démonstration. — On choisit une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation Λ_0 de N prolongeant λ. Les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de N prolongeant λ sont toutes de la forme $\chi\Lambda_0$, où χ est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère de N trivial sur J. Il existe un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère χ' de $\tilde{\mathrm{N}}$ trivial sur J tel que la restriction de Λ_0 à $\tilde{\mathrm{N}}$ soit isomorphe à $\chi'\Lambda^\flat$. Puisque le groupe N/J est isomorphe à $\mathbb{Z}$, il existe un caractère χ de N prolongeant χ'. Alors $\Lambda = \chi\Lambda_0$ est une représentation de N prolongeant $\Lambda^\flat$. □

On choisit une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation Λ de N prolongeant $\Lambda^\flat$, et on note Λ° son induite au groupe $\mathrm{N}^\circ = \mathrm{N}_{\mathrm{B}^\times}(\mathrm{U})\mathrm{J}$ (corollaire 3.4). D'après la proposition 3.1, l'induite compacte :

$$\rho = \mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda) = \mathrm{ind}_{\mathrm{N}^\circ}^{\mathrm{G}}(\Lambda^\circ) \tag{3.11}$$

est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de G. On va montrer que :

$$\mathbf{r}_\ell(\Lambda^\circ) = \frac{(\mathrm{N}:\tilde{\mathrm{N}})}{a} \cdot \big([\Lambda^\circ] + [\alpha\Lambda^\circ] + \cdots + [\alpha^{a-1}\Lambda^\circ]\big) \tag{3.12}$$

dans le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de longueur finie de N°. En appliquant $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}^\circ}^{\mathrm{G}}$, on en déduira (3.10). L'induite :

$$\mathrm{ind}_{\tilde{\mathrm{N}}}^{\mathrm{N}^\circ}(\mathfrak{l}) = \mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N}^\circ}\left(\mathrm{ind}_{\tilde{\mathrm{N}}}^{\mathrm{N}}(\mathfrak{l})\right)$$

est une structure entière de Λ°. Puisque $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N}^\circ}$ est un foncteur exact, il suffit pour déterminer $\mathbf{r}_\ell(\Lambda^\circ)$ de calculer la réduction modulo ℓ de $\mathrm{ind}_{\tilde{\mathrm{N}}}^{\mathrm{N}}(\Lambda)$. Écrivons :

$$\mathrm{ind}_{\tilde{\mathrm{N}}}^{\mathrm{N}}(\mathfrak{l}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell = \Lambda \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{N}/\tilde{\mathrm{N}}], \tag{3.13}$$

où $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{N}/\tilde{\mathrm{N}}]$ désigne la représentation régulière du groupe cyclique $\mathrm{N}/\tilde{\mathrm{N}}$, c'est-à-dire l'induite à N du $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère trivial de $\tilde{\mathrm{N}}$. Sa semi-simplification est égale à :

$$\frac{(\mathrm{N}:\tilde{\mathrm{N}})}{a}\cdot\left([1]+[\alpha]+\cdots+[\alpha^{a-1}]\right),$$

parce que la restriction de α à N est un générateur du groupe $\mathrm{Hom}(\mathrm{N}/\tilde{\mathrm{N}}, \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times)$. Compte tenu de (3.13), on obtient :

$$\mathbf{r}_\ell\left(\mathrm{ind}_{\tilde{\mathrm{N}}}^{\mathrm{N}}(\Lambda)\right) = \frac{(\mathrm{N}:\tilde{\mathrm{N}})}{a}\cdot\left([\Lambda]+[\alpha\Lambda]+\cdots+[\alpha^{a-1}\Lambda]\right). \tag{3.14}$$

On obtient le résultat annoncé en induisant à N°. □

Remarque 3.17. — La représentation ρ dépend du choix de Λ (changer de Λ a pour effet de tordre ρ par une puissance de α) mais $n(\rho)$, $f(\rho)$, $b(\rho)$, $s(\rho)$ ne dépendent que de (la classe d'inertie de) $\tilde{\rho}$ et de ℓ. On a les formules :

$$\frac{b(\tilde{\rho})}{b(\rho)} = \frac{s(\rho)}{s(\tilde{\rho})} = (\mathrm{N}:\tilde{\mathrm{N}}), \quad \left\{\frac{n(\tilde{\rho})}{n(\rho)}\right\}_\ell = a, \quad f(\tilde{\rho}) = f(\rho), \tag{3.15}$$

la seconde égalité provenant de la relation (3.8).

Corollaire 3.18. — *Soit $\tilde{\rho}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière. Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(1) D *est égale à* F *;*
(2) *l'ordre de q^d dans $\mathbb{F}_\ell^\times$ est strictement supérieur à m (cas banal) ;*

on a $\tilde{\mathrm{N}} = \mathrm{N}$ et $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ est irréductible.

Démonstration. — Dans le cas où $\mathrm{D} = \mathrm{F}$, c'est une conséquence de la remarque 2.20(1). □

Remarque 3.19. — Dans le cas où D égale F, on obtient ainsi une nouvelle preuve du théorème [**31**, III.1.1] qui n'utilise pas la théorie des dérivées.

Exemple 3.20. — Soit D une algèbre quaternionique sur F (c'est-à-dire que $d = 2$) et soit ℓ un nombre premier différent de p. Soit $(\mathrm{U}, \tilde{\chi})$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple de niveau 0 de $\mathrm{D}^\times$, c'est-à-dire que $\mathrm{U} = \mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$ et que le caractère :

$$\tilde{\chi} : \mathrm{U} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

est trivial sur $\mathrm{U}^1 = 1 + \mathfrak{p}_\mathrm{D}$, de sorte qu'on peut le voir comme un caractère de $\mathfrak{k}_\mathrm{D}^\times$. Soient $\tilde{b}$ l'indice du normalisateur de $\tilde{\chi}$ dans $\mathrm{D}^\times$ et $\tilde{\rho}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de $\mathrm{D}^\times$ dont la restriction à U contient $\tilde{\chi}$. Celle-ci est cuspidale de niveau 0 et de dimension finie $\tilde{b}$.

Si $\tilde{b} = 1$, alors $\tilde{\rho}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère entier de $\mathrm{D}^\times$ se réduisant en un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère de $\mathrm{D}^\times$. On suppose maintenant que $\tilde{b} = 2$, c'est-à-dire que $\tilde{\chi}^{q-1} \neq 1$. On suppose que $\tilde{\chi}$ est entier, on note $\chi : \mathrm{U} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ sa réduction et b l'indice du normalisateur de χ dans $\mathrm{D}^\times$. Si l'ordre de $\tilde{\chi}^{q-1}$ n'est pas une puissance de ℓ, alors $b = 2$ et $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible. Sinon, on a :

$$\chi^{q-1} = 1, \tag{3.16}$$

c'est-à-dire que $b = 1$. Si $\ell \neq 2$, alors $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ est égale à la somme des deux $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractères de $\mathrm{D}^\times$ prolongeant χ. Si $\ell = 2$, alors χ se prolonge de façon unique en un $\overline{\mathbb{F}}_2$-caractère de $\mathrm{D}^\times$, que l'on note encore χ, et $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ est égale à $\chi + \chi$.

Exemple 3.21. — Si $q = 8$ et $\ell = 3$, la condition (3.16) est vérifiée pour tout caractère entier $\tilde{\chi}$. Toute $\overline{\mathbb{F}}_3$-représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{D}^\times$ est de dimension 1.

3.6. Relèvement d'une représentation cuspidale

3.6.1. Soit ℓ un nombre premier différent de p.

Proposition 3.22. — *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de* G*. Il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\rho}$ de* G *telle que $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) \geqslant [\rho]$.*

Démonstration. — Soit (J, λ) un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-type simple maximal de G contenu dans ρ. On note N le normalisateur de λ dans G et Λ le prolongement de λ à N tel que ρ soit isomorphe à $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\Lambda)$. D'après la proposition 2.43, il existe un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple maximal $(\mathrm{J}, \tilde{\lambda})$ relevant λ. On note $\tilde{\mathrm{N}}$ le normalisateur de $\tilde{\lambda}$ dans G, et on fixe un prolongement $\tilde{\Lambda}$ de λ à $\tilde{\mathrm{N}}$ dont la réduction modulo ℓ coïncide avec la restriction de Λ à $\tilde{\mathrm{N}}$. Alors l'induite compacte de $\tilde{\Lambda}$ à G est irréductible cuspidale entière, et sa réduction modulo ℓ contient ρ d'après le théorème 3.15. □

3.6.2. Avant de poursuivre, on a besoin de résultats sur le relèvement des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{k}')$ où $\mathfrak{k}'$ est le corps résiduel de D'. On reprend les notations du paragraphe 2.8.2. Si $a \geqslant 1$ est un entier, on note $\{a\}_\ell$ le plus grand diviseur de a premier à ℓ. Si $a, b \geqslant 1$, on note (a, b) leur plus grand diviseur commun.

Lemme 3.23. — *Soit $n \geqslant 1$, soit $\tilde{\chi} : \mathfrak{k}_n'^\times \to \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$ et soit χ la réduction de $\tilde{\chi}$ modulo ℓ. On note respectivement $f'(\tilde{\chi})$ et $f'(\chi)$ les cardinaux de leurs orbites sous l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathfrak{k}}'/\mathfrak{k}')$*.*

(1) *Si ℓ ne divise pas l'ordre de $\tilde{\chi}$, alors $f'(\chi) = f'(\tilde{\chi})$.*

(2) *Sinon, on a :*

$$\left\{\frac{f'(\tilde{\chi})}{f'(\chi)}\right\}_\ell = \frac{e'}{(e', f'(\chi))}, \tag{3.17}$$

où e' désigne l'ordre du cardinal de $\mathfrak{k}'$ dans $\mathbb{F}_\ell^\times$.

Démonstration. — On note k l'ordre de $\tilde{\chi}$ et q' le cardinal de $\mathfrak{k}'$. L'entier $f'(\tilde{\chi})$ est l'ordre de q' dans $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^\times$. Si ℓ est premier à k, alors χ est d'ordre k, donc $f'(\chi) = f'(\tilde{\chi})$. Sinon, on écrit k sous la forme $k'\ell^r$, avec k' premier à ℓ et $r \geqslant 1$. L'ordre de q' dans $(\mathbb{Z}/k'\mathbb{Z})^\times$ est égal à $f(\chi)$, tandis que l'ordre de q' dans $(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^\times$ est de la forme $e'\ell^{r'}$ avec $r' \geqslant 0$. On obtient la formule annoncée en remarquant que l'ordre de q' dans $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^\times$ est égal au plus petit multiple commun aux ordres de q' dans $(\mathbb{Z}/k'\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^\times$ respectivement. □

Soit $\mathfrak{k}$ le corps résiduel de E, et soit d' le degré de $\mathfrak{k}'$ sur $\mathfrak{k}$, qui est égal au degré réduit de D′ sur E. Si σ est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{k}')$, on note $b(\sigma)$ le cardinal de la $\mathrm{Gal}(\overline{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$-orbite de σ.

Lemme 3.24. — *Soient σ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{k}')$ et $\tilde\sigma$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{k}')$ relevant σ, soit $\tilde\chi \in \mathrm{X}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ un antécédent de $\tilde\sigma$ par (2.33) et soit χ sa réduction modulo ℓ.*

(1) *Si ℓ ne divise pas l'ordre de $\tilde\chi$, alors $b(\tilde\sigma) = b(\sigma)$.*

(2) *Sinon, on note $f(\chi)$ le cardinal de l'orbite de χ sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$, et on a :*

$$\left\{\frac{b(\tilde\sigma)}{b(\sigma)}\right\}_\ell = \frac{(e, d'f'(\chi))}{(e, f(\chi))}, \tag{3.18}$$

où e désigne l'ordre du cardinal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathbb{F}_\ell^\times$.

Démonstration. — On note $f(\tilde\chi)$ le cardinal de l'orbite de $\tilde\chi$ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$. On a :

$$f(\tilde\chi) = b(\tilde\sigma)f'(\tilde\chi), \quad f(\chi) = b(\sigma)f'(\chi),$$

ce qui permet d'écrire la relation :

$$\left\{\frac{b(\tilde\sigma)}{b(\sigma)}\right\}_\ell = \left\{\frac{f'(\tilde\chi)}{f'(\chi)}\right\}_\ell \cdot \left\{\frac{f(\chi)}{f(\tilde\chi)}\right\}_\ell. \tag{3.19}$$

Si ℓ ne divise pas l'ordre de χ, le résultat est une conséquence immédiate du lemme 3.23. Sinon, outre la formule (3.17), on obtient :

$$\left\{\frac{f(\tilde\chi)}{f(\chi)}\right\}_\ell = \frac{e}{(e, f(\chi))} \tag{3.20}$$

en appliquant le lemme 3.23 relativement à $\mathfrak{k}$. On obtient la formule (3.18) en remarquant que $e' = e/(e, d')$. □

On en tire le corollaire suivant.

Corollaire 3.25. — *Si σ est supercuspidale, il y a un relèvement $\tilde\sigma$ de σ tel que $b(\tilde\sigma) = b(\sigma)$. Sinon, la quantité :*

$$\left\{\frac{b(\tilde\sigma)}{b(\sigma)}\right\}_\ell \tag{3.21}$$

est indépendante du relèvement $\tilde\sigma$ de σ.

Démonstration. — Le relèvement de Teichmüller $\tilde\chi_0$ de χ est son unique relèvement qui soit d'ordre premier à ℓ, et σ est supercuspidale si et seulement si $f(\tilde\chi_0) = n$. □

3.6.3. Dans la situation de la proposition 3.22, il n'existe pas toujours de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de G dont la réduction soit exactement $[\rho]$ (exemple 3.28). Cependant, si ρ est supercuspidale, on a le résultat important suivant.

Théorème 3.26. — *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible supercuspidale de* G. *Il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière $\tilde\rho$ de* G *telle que $\mathbf{r}_\ell(\tilde\rho) = [\rho]$.*

Démonstration. — Soit (J, λ) un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-type simple maximal de G contenu dans ρ. D'après la proposition 2.43, il y a un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type simple maximal $(\mathrm{J}, \tilde{\lambda})$ relevant λ et, d'après la proposition 3.25, on peut le choisir de telle sorte que $\tilde{\mathrm{N}} = \mathrm{N}$ (avec les notations de la preuve du théorème 3.22). La fin de la preuve est la même que celle du théorème 3.22. □

Remarque 3.27. — Dans le cas banal, c'est-à-dire lorsque l'ordre de q^d dans $\mathbb{F}_\ell^\times$ est strictement supérieur à m, toute représentation irréductible cuspidale est supercuspidale, et le théorème 3.26 s'applique (voir [**22**]).

Exemple 3.28. — On va donner un exemple de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale n'admettant aucun relèvement à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. D'après le corollaire 3.25, il suffit de trouver un exemple où la quantité (3.21) est > 1. On fixe une algèbre quaternionique D sur F. Soit (U, σ) un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-type simple de niveau 0 de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{D})$. On peut supposer que $\mathrm{U} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\mathrm{D})$ et considérer σ comme une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{k}_\mathrm{D})$. On fixe une extension quadratique $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{k}_\mathrm{D}$. D'après le paragraphe 2.8.2, la représentation σ est paramétrée par un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère χ de $\mathfrak{k}^\times$ admettant un relèvement :

$$\tilde{\chi} : \mathfrak{k}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \tag{3.22}$$

tel que $\tilde{\chi}^{q^2} \neq \tilde{\chi}$. On note $\tilde{\sigma}$ la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{k}_\mathrm{D})$ paramétrée par $\tilde{\chi}$. C'est un relèvement de σ. On suppose que :

$$\chi^{q^2} = \chi, \tag{3.23}$$

c'est-à-dire que la représentation σ n'est pas supercuspidale. Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{D})$ dont la restriction à U contient σ, et soit $\tilde{\rho}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible dont la restriction à U contient $\tilde{\sigma}$. Ce sont des représentations cuspidales de niveau 0. Si $b(\rho) = 2$, alors ρ se relève en $\tilde{\rho}$ puisque l'entier $b(\tilde{\rho})$ divise 2 et est un multiple de $b(\rho) = 2$. On suppose maintenant que $b(\rho) = 1$, de sorte qu'on a :

$$\chi^q = \chi. \tag{3.24}$$

Pour que ρ se relève en une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{D})$, il faut et suffit qu'on puisse choisir $\tilde{\sigma}$ de sorte que son orbite sous l'action de $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_\mathrm{D}/\mathfrak{k}_\mathrm{F})$ soit de cardinal 1. En d'autres termes, il faut et suffit que χ admette un relèvement $\tilde{\chi}$ tel que :

$$\tilde{\chi}^{q^2} = \tilde{\chi}^q \neq \tilde{\chi}, \tag{3.25}$$

ce qui est impossible. En conclusion, une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation ρ irréductible cuspidale non supercuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{D})$ a un relèvement à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ si et seulement si $b(\rho) = 2$.

Exemple 3.29. — Si $q = 4$ et $\ell = 17$, le groupe $\mathfrak{k}^\times$ est le produit direct d'un groupe cyclique d'ordre 15 par un groupe d'ordre 17. Un $\overline{\mathbb{F}}_{17}$-caractère de $\mathfrak{k}^\times$ est trivial sur le facteur d'ordre 17 et vérifie donc la condition (3.23), c'est-à-dire qu'aucune $\overline{\mathbb{F}}_{17}$-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{k}_\mathrm{D})$ n'est supercuspidale. Compte tenu de (3.24), on a $b(\rho) = 1$ si et seulement si on a $\chi^3 = 1$. Si $\tilde{\chi}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_{17}$-caractère de $\mathfrak{k}^\times$ d'ordre 17, sa réduction modulo 17 est le caractère trivial, qui paramètre une $\overline{\mathbb{F}}_{17}$-représentation irréductible cuspidale non supercuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{D})$ n'admettant pas de relèvement à $\overline{\mathbb{Q}}_{17}$.

4. Types et algèbres de Hecke

Cette section est consacrée à à l'étude des liens entre représentations lisses de G et modules sur certaines algèbres de Hecke affines. On introduit la notion de représentation quasi-projective au paragraphe 4.1, et on donne au paragraphe 4.2 des conditions pour qu'une induite parabolique soit irréductible. Un corollaire est l'important théorème 4.18 permettant de ramener le problème de la classification de toutes les représentations irréductibles de G à celui des représentations irréductibles ayant un support cuspidal inertiellement équivalent à $[\rho] + \cdots + [\rho] = n \cdot [\rho]$ où ρ est une représentation irréductible cuspidale fixée. On explique au paragraphe 4.4 que ce problème de classification ne dépend que de n et d'un nombre limité de paramètres attachés à ρ. Ceci permet de se ramener, pour certaines questions, au problème de la classification des représentations irréductibles unipotentes du groupe déployé $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}')$, où F' est une extension finie de F.

4.1. Représentations quasi-projectives

Soit $m \geqslant 1$ un entier et soit Q une représentation de $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$. La définition suivante est due à Arabia [**32**, A.3].

Définition 4.1. — La représentation Q est dite *quasi-projective* si, pour toute représentation V de G et tout homomorphisme surjectif $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \mathrm{V})$, l'homomorphisme de $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \mathrm{V})$ défini par $\alpha \mapsto \varphi \circ \alpha$ est surjectif.

On dit qu'une représentation de G est sans Q-torsion si elle n'admet pas de sous-représentation non nulle W telle que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \mathrm{W}) = \{0\}$. On rappelle que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ est la catégorie des représentations (lisses) de G sur des R-espaces vectoriels. On a le théorème important suivant (voir [**32**, A.5, théorème 10]).

Théorème 4.2. — *On suppose que* Q *est quasi-projective et de type fini.*

(1) *Le foncteur* $\mathrm{V} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \mathrm{V})$ *définit une équivalence entre la sous-catégorie pleine de* $\mathscr{R}$ *formée des représentations sans* Q*-torsion qui sont quotients d'une somme directe de copies de* Q*, et la catégorie des* $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$*-modules à droite.*

(2) *Cette équivalence induit une bijection entre les classes de représentations irréductibles* V *de* G *telles que* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}, \mathrm{V}) \neq \{0\}$ *et les classes de* $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$*-modules irréductibles.*

Soit τ une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact K de G. On reprend les notations du paragraphe 2.6 et on pose :

$$\mathrm{Q} = \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau). \tag{4.1}$$

Comme τ est irréductible, Q est de type fini. Elle n'est pas toujours projective, c'est-à-dire que le foncteur $\mathbf{M}_\tau$ n'est pas toujours exact sur $\mathscr{R}$. Cependant, si elle est quasi-projective, on va voir que ce foncteur est exact sur une sous-catégorie suffisamment grande.

Définition 4.3. — On note $\mathscr{E}_\tau$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}$ formée des sous-quotients de représentations engendrées par leur composante τ-isotypique.

Cette sous-catégorie est stable par sous-quotients dans $\mathscr{R}$. Son intérêt réside dans le résultat suivant. On pose $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathrm{G}, \tau)$, l'algèbre des endomorphismes de Q.

Proposition 4.4. — *On suppose que* $\mathrm{Q} = \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)$ *est quasi-projective et de type fini.*

(1) *La restriction du foncteur* $\mathbf{M}_\tau$ *à* $\mathscr{E}_\tau$ *est un foncteur exact.*

(2) *Pour tout $\mathcal{H}$-module à droite $\mathfrak{m}$, l'homomorphisme canonique de $\mathcal{H}$-modules :*
$$\mathfrak{m} \to \mathbf{M}_\tau \left(\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}} \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)\right)$$
est un isomorphisme.

Démonstration. — Dans [**32**, A.3], Arabia définit une catégorie $\mathscr{D}_{\mathrm{Q}}$ sur laquelle $\mathbf{M}_\tau$ est exact, et elle contient $\mathscr{E}_\tau$ d'après *ibid.*, proposition 3. La seconde assertion est une conséquence de *ibid.*, théorème 4. □

Soit P un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M et de radical unipotent U, et soit τ_{M} une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact K_{M} de M. On suppose que (K, τ) est une paire couvrante de $(\mathrm{K}_{\mathrm{M}}, \tau_{\mathrm{M}})$ (voir le paragraphe 2.6).

Proposition 4.5. — *Soit σ une représentation de longueur finie de* M *engendrée par sa composante τ_{M}-isotypique. On suppose que* $\mathrm{Q} = \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)$ *est quasi-projective de type fini. Le foncteur* $\mathbf{M}_\tau$ *induit des bijections :*

(1) *entre facteurs irréductibles de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ contenant τ et facteurs irréductibles de $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))$;*

(2) *entre facteurs irréductibles du socle de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ contenant τ et facteurs irréductibles du socle de $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))$;*

(3) *entre facteurs irréductibles du cosocle de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ contenant τ et facteurs irréductibles du cosocle de $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))$.*

Remarque 4.6. — En d'autres termes, la multiplicité d'une représentation irréductible π contenant τ dans $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ (resp. dans le socle, le cosocle de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$) est égale à la multiplicité de $\mathbf{M}_\tau(\pi)$ dans $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))$ (resp. le socle, le cosocle de $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))$).

Démonstration. — D'après la proposition 2.28, l'induite $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ est engendrée par sa composante τ-isotypique. On fixe une suite de composition de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ dans $\mathscr{R}$ dont les quotients sont irréductibles. D'après la proposition 4.4, les termes de cette suite de composition sont dans $\mathscr{E}_\tau$ et on obtient le résultat voulu en appliquant $\mathbf{M}_\tau$. □

Rappelons (§2.6.3) qu'on a un homomorphisme j_{P} de $\mathcal{H}_{\mathrm{M}} = \mathcal{H}(\mathrm{M}, \tau_{\mathrm{M}})$ dans $\mathcal{H}$.

Proposition 4.7. — *Pour tout $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-module à droite $\mathfrak{m}$ de dimension finie, on a un isomorphisme de représentations de* G *:*

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau) \simeq \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^{\mathrm{G}} \left(\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{ind}_{\mathrm{K}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{M}}(\tau_{\mathrm{M}})\right), \tag{4.2}$$

où P^- *désigne le sous-groupe parabolique de* G *opposé à* P *relativement à* M.

Remarque 4.8. — L'hypothèse de dimension finie sur $\mathfrak{m}$ provient de ce que notre preuve utilise la propriété de seconde adjonction (1.1).

Démonstration. — Le foncteur $\mathbf{M}_\tau$ admet un adjoint à gauche :

$$\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}} \mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau) \tag{4.3}$$

de la catégorie des $\mathcal{H}$-modules à droite dans $\mathscr{R}$, et le foncteur $\boldsymbol{j}_{\mathrm{P}}^*$ admet un adjoint à gauche $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}} \mathcal{H}$ de la catégorie des $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-modules à droite vers celle des $\mathcal{H}$-modules à droite. À partir de (2.23) et en utilisant la seconde adjonction (1.1), on obtient le résultat. □

Le cas qui nous intéresse particulièrement est celui d'un type semi-simple (voir le paragraphe 2.7).

Proposition 4.9. — *Soit* (K,τ) *un type semi-simple de* G. *Alors l'induite compacte* $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)$ *est quasi-projective de type fini.*

Démonstration. — On va utiliser le critère [**33**, 3.1]. Il s'agit de montrer que la restriction de $\mathrm{Q}=\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)$ à K se décompose sous la forme $\mathrm{V}\oplus\mathrm{W}$, où V est une somme directe de copies de τ et où aucun sous-quotient irréductible de W n'est isomorphe à τ. On décompose τ sous la forme $\varkappa\otimes\sigma$ et on note ε la restriction de $\varkappa$ à K^1. Comme K^1 est un pro-p-groupe (voir (2.26)), la restriction de Q à K^1 est semi-simple et se décompose sous la forme $\mathrm{V}_1\oplus\mathrm{W}_1$, où V_1 est une somme directe de copies de ε et où aucun sous-quotient irréductible de W_1 n'est isomorphe à ε. Ces sous-espaces sont stables par K. En tant que représentations de K, l'espace W_1 ne contient aucun sous-quotient isomorphe à τ et V_1 est de la forme $\varkappa\otimes\varsigma$, où :

$$\varsigma=\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^1}(\varkappa,\mathrm{Q})$$

est une représentation de K triviale sur K^1.

Lemme 4.10. — *La représentation* ς *est une somme directe de conjugués de* σ.

Démonstration. — Compte tenu de la construction des types semi-simples au paragraphe 2.7, il y a un sous-groupe de Levi $\mathrm{L}\subseteq\mathrm{G}$ tel que (K,τ) soit une paire couvrante de $(\mathrm{K}_{\mathrm{L}},\tau_{\mathrm{L}})$ et tel que :

$$\mathrm{K}_{\mathrm{L}}=\mathrm{K}_1\times\cdots\times\mathrm{K}_u,\quad \tau_{\mathrm{L}}=\tau_1\otimes\cdots\otimes\tau_u,$$

avec $u\geqslant 1$ et où chaque (K_i,τ_i), $i=1,\dots,u$, est de la forme donnée par la proposition 2.31. (Avec les notations du paragraphe 2.7.3, L est le sous-groupe de Levi associé à la partition :

$$\{1,\dots,n\}=\coprod_{k=1}^{t}\coprod_{i=1}^{u_k}\mathrm{I}_{k,j}$$

et u est la somme des u_k.) Plus précisément, pour chaque $i\in\{1,\dots,u\}$, il existe une strate simple $[\mathfrak{A}_i,n_i,0,\beta_i]$ d'une F-algèbre centrale simple A_i, un caractère simple $\theta_i\in\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i,0,\beta_i)$ et un sous-groupe parabolique P_i de $\mathrm{A}_i^\times$ tels que $\mathrm{K}_i=\mathrm{H}^1(\beta_i,\mathfrak{A}_i)(\mathrm{J}(\beta_i,\mathfrak{A}_i)\cap\mathrm{P}_i)$, et τ_i se décompose sous la forme $\varkappa_i\otimes\sigma_i$.

La restriction de Q à K^1 se décompose en la somme directe des induites $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}^1\cap\mathrm{K}^x}^{\mathrm{K}^1}(\tau^x)$ pour $x\in\mathrm{K}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{K}^1$. Aussi l'espace de ς est-il la somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^1\cap\mathrm{K}^x}(\varepsilon,\tau^x)$ pour $x\in\mathrm{K}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{K}^1$. Si l'on écrit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^1\cap\mathrm{K}^x}(\varepsilon,\tau^x)\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^1\cap(\mathrm{K}^1)^x}(\varepsilon,\varepsilon^x)\otimes\mathcal{V}_\sigma,$$

où $\mathcal{V}_\sigma$ désigne l'espace de σ qui compte ici comme un espace de multiplicité, on voit que seuls les $x\in\mathrm{G}$ qui entrelacent ε apportent une contribution non nulle. On peut donc supposer que x appartient à L, et plus précisément, si l'on écrit $x=(x_1,\dots,x_u)$, on peut choisir chaque x_i dans $\mathrm{B}_i^\times$, où B_i est le centralisateur de $\mathrm{F}(\beta_i)$ dans A_i. Compte tenu des décompositions d'Iwahori des groupes K et K^1 et des isomorphismes :

$$\mathrm{K}/\mathrm{K}^1\simeq\mathrm{K}_{\mathrm{L}}/\mathrm{K}_{\mathrm{L}}^1\simeq\prod_{i=1}^{u}\mathrm{K}_i/\mathrm{K}_i^1,\tag{4.4}$$

l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^1\cap\mathrm{K}^x}(\varkappa,\tau^x)$ se décompose sous la forme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}_{\mathrm{L}}^1\cap\mathrm{K}_{\mathrm{L}}^x}(\varkappa_{\mathrm{L}},\tau_{\mathrm{L}}^x)=\bigotimes_{i=1}^{u}\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}_i^1\cap\mathrm{K}_i^{x_i}}(\varkappa_i,\tau_i^{x_i}).$$

On est donc ramené à prouver le lemme dans le cas d'un type semi-simple (K_i, τ_i) donné par la proposition 2.31 ou, ce qui revient au même, dans le cas d'un type simple (J, λ) associé à une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$. Dans ce cas, on reprend les arguments de la démonstration de Vignéras [**33**, 8]. D'abord, on peut remplacer λ par une représentation de la forme donnée par le lemme 2.18 avec $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap \mathrm{B}$ maximal. Grâce à [**25**, Lemme 1.7], on peut même supposer que $\mathfrak{A}$ est inclus dans $\mathfrak{A}'$. Ensuite, la fin de la preuve ne diffère pas de celle de [**33**, Corollary 8.4(1)]. □

Le lemme permet de vérifier que la représentation Q satisfait au critère [**33**, 3.1], et le résultat s'ensuit. □

Remarque 4.11. — On suppose que R est de caractéristique ℓ non nulle. Soit (J, λ) un type simple et soit F' une extension de F comme dans la proposition 2.21. Si $q_{\mathrm{F}'}$ n'est pas congru à 1 modulo ℓ, alors σ est projective comme représentation de $\mathrm{J}/\mathrm{J}^1 \simeq \mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})^r$ (voir [**31**, III.2.9]). Puisque le foncteur $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}$ préserve la projectivité, on en déduit que l'induite compacte $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda)$ est projective.

4.2. Paires couvrantes et induction parabolique

Soit un entier $m \geqslant 1$ et soit $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$. Deux paires cuspidales (M, ϱ) et (M', ϱ') de G sont dites *inertiellement équivalentes* s'il y a un caractère non ramifié χ de M tel que (M', ϱ') soit conjuguée à $(\mathrm{M}, \varrho\chi)$ sous G. On note $[\mathrm{M}, \varrho]_{\mathrm{G}}$ la classe d'inertie (c'est-à-dire la classe d'équivalence inertielle) de (M, ϱ). Si Ω est la classe d'inertie d'une paire cuspidale de G, on note :

$$\mathrm{Irr}_{\mathrm{R}}(\Omega)^{\star} = \mathrm{cusp}^{-1}(\Omega) \tag{4.5}$$

l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G dont le support cuspidal appartient à Ω.

Proposition 4.12. — *Soit* (M, ϱ) *une paire cuspidale de* G*, soit* $\Omega = [\mathrm{M}, \varrho]_{\mathrm{G}}$ *sa classe d'inertie, soit* $(\mathrm{J}_{\mathrm{M}}, \lambda_{\mathrm{M}})$ *un type simple maximal de* M *contenu dans* ϱ *et soit* (K, τ) *une paire couvrante de* $(\mathrm{J}_{\mathrm{M}}, \lambda_{\mathrm{M}})$ *dans* G*. Alors :*

$$\pi \in \mathrm{Irr}(\Omega)^{\star} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{cusp}(\pi) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}}(\tau, \pi) \neq \{0\}.$$

Démonstration. — La représentation ϱ est un quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{M}}(\lambda_{\mathrm{M}})$. En induisant à G le long de n'importe quel sous-groupe parabolique P de sous-groupe de Levi M, et compte tenu de (2.24), on en déduit que tout quotient irréductible de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\varrho)$ est un quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)$. Par conséquent, toute représentation irréductible π de G dont le support cuspidal appartient à Ω contient τ.

Inversement, soit π une représentation irréductible de G contenant τ. D'après (2.23), la représentation $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi)$ contient λ_{M}, c'est-à-dire qu'il existe un sous-quotient irréductible de $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi)$ de la forme $\varrho\chi$ avec χ un caractère non ramifié de M. Soit ϱ' une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi M' et soit P' un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M' tel que π soit une sous-représentation de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\varrho')$. Ainsi $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{G}}(\varrho'))$ a un sous-quotient de la forme $\varrho\chi$. On déduit du lemme géométrique que les paires (M, ϱ) et (M', ϱ') sont inertiellement équivalentes, c'est-à-dire que $\mathrm{cusp}(\pi)$ appartient à Ω. □

Soit M un sous-groupe de Levi de G. On suppose que $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\alpha$ pour $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit (K_i, τ_i) un type semi-simple de G_{m_i}. On pose :

$$\mathrm{K}_{\mathrm{M}} = \mathrm{K}_1 \times \cdots \times \mathrm{K}_r, \quad \tau_{\mathrm{M}} = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r.$$

Soit (K, τ) un type semi-simple de G qui soit une paire couvrante de $(\mathrm{K}_\mathrm{M}, \tau_\mathrm{M})$. Soit enfin σ une représentation irréductible de M contenant τ_M.

Proposition 4.13. — *La représentation* $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\sigma)$ *est irréductible si et seulement si :*

$$\mathbf{M}_\tau\left(\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\sigma)\right)$$

est un $\mathcal{H}$*-module irréductible.*

Démonstration. — L'une des implications est donnée par le théorème 4.2 joint à la proposition 2.28. Pour l'autre, soit π une sous-représentation irréductible de $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\sigma)$. D'après la proposition 4.12, le $\mathcal{H}$-module $\mathbf{M}_\tau(\pi)$ est non nul : il est donc égal à $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\sigma))$. Puisque $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\sigma)$ est engendrée par sa composante τ-isotypique d'après la proposition 2.28, elle est égale à π, ce qui prouve qu'elle est irréductible. □

Proposition 4.14. — *On suppose que :*

$$\mathbf{M}_{\tau_\mathrm{M}}(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathcal{H} \tag{4.6}$$

est un $\mathcal{H}$*-module irréductible. Alors* $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\sigma))$ *est irréductible et isomorphe à* $\mathbf{M}_{\tau_\mathrm{M}}(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathcal{H}$*, et la représentation* $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\sigma)$ *est irréductible.*

Démonstration. — On commence par prouver le résultat suivant. On note Q l'induite compacte de τ à G et Q_M celle de τ_M à M.

Lemme 4.15. — *Soit* π *une représentation admissible de* M *engendrée par sa composante* τ_M*-isotypique. Il existe un homomorphisme surjectif :*

$$\mathbf{M}_{\tau_\mathrm{M}}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathcal{H} \to \mathbf{M}_\tau\left(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^\mathrm{G}(\pi)\right)$$

de $\mathcal{H}$*-modules à droite.*

Remarque 4.16. — La condition d'admissibilité provient de ce que notre preuve utilise (4.2), qui nécessite la propriété de seconde adjonction.

Démonstration. — On part de l'application canonique surjective :

$$\mathbf{M}_{\tau_\mathrm{M}}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathrm{Q}_\mathrm{M} \to \pi. \tag{4.7}$$

En appliquant le foncteur $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^\mathrm{G}$ à (4.7), on obtient une application surjective :

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^\mathrm{G}\left(\mathbf{M}_{\tau_\mathrm{M}}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathrm{Q}_\mathrm{M}\right) \to \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^\mathrm{G}(\pi) \tag{4.8}$$

entre représentations engendrées par leur composante τ-isotypique d'après la proposition 2.28. D'après (4.2), le membre de gauche de (4.8) est isomorphe à $\mathbf{M}_{\tau_\mathrm{M}}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathrm{Q}$. D'après la proposition 4.4, en appliquant le foncteur $\mathbf{M}_\tau$ à (4.8), on a une application surjective :

$$\mathbf{M}_\tau\left(\mathbf{M}_{\tau_\mathrm{M}}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathrm{Q}\right) \to \mathbf{M}_\tau\left(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^\mathrm{G}(\pi)\right) \tag{4.9}$$

et le membre de gauche de (4.9) est isomorphe à $\mathbf{M}_{\tau_\mathrm{M}}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathcal{H}$. □

Appliquons le lemme 4.15 à σ. D'après la proposition 2.28, le module $\mathbf{M}_\tau(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^\mathrm{G}(\sigma))$ est non nul. Il est donc irréductible d'après le lemme 4.15 et l'hypothèse sur (4.6). D'après la proposition 4.13, la représentation $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}^-}^\mathrm{G}(\sigma)$ est irréductible. D'après [**13**, Lemme 4.13] (voir aussi [**21**, Proposition 2.2]), elle est donc isomorphe à $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}(\sigma)$: on en déduit le résultat voulu. □

Corollaire 4.17. — *On suppose que $\mathcal{H}$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$. Alors $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma)$ est irréductible, et le $\mathcal{H}$-module $\mathbf{M}_{\tau}(\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\sigma))$ est irréductible et isomorphe à $\mathbf{M}_{\tau_{\mathrm{M}}}(\sigma)\otimes_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}\mathcal{H}$.*

Démonstration. — Puisque Q_{M} est quasi-projective de type fini, le théorème 4.2 implique que le $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-module $\mathbf{M}_{\tau_{\mathrm{M}}}(\sigma)$ est irréductible. Puisque $\mathcal{H}$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$, l'hypothèse de la proposition 4.14 est vérifiée. On en déduit le résultat voulu. □

On termine ce paragraphe en donnant une application importante du corollaire 4.17. Si ρ est une représentation irréductible cuspidale de G, on note :

$$\Omega_{\rho}=\{[\rho\chi]\mid\chi:\mathrm{G}\to\mathrm{R}^{\times}\text{ non ramifié}\}\tag{4.10}$$

la classe d'équivalence inertielle de ρ.

Théorème 4.18. — *Soit $r\geqslant 1$ un entier et soient $\rho_1,\dots,\rho_r$ des représentations irréductibles cuspidales deux à deux non inertiellement équivalentes. Pour chaque $i\in\{1,\dots,r\}$, on fixe un support cuspidal $\mathfrak{s}_i$ formé de représentations inertiellement équivalentes à ρ_i.*

(1) *Pour chaque entier i, soit π_i une représentation irréductible de support cuspidal $\mathfrak{s}_i$. Alors l'induite $\pi_1\times\cdots\times\pi_r$ est irréductible.*

(2) *Soit π une représentation irréductible de support cuspidal $\mathfrak{s}_1+\cdots+\mathfrak{s}_r$. Il existe des représentations $\pi_1,\dots,\pi_r$, uniques à isomorphisme près, telles que π_i soit de support cuspidal $\mathfrak{s}_i$ pour chaque i et telles que $\pi_1\times\cdots\times\pi_r$ soit isomorphe à π.*

Remarque 4.19. — Pour $\mathfrak{s}$ un support cuspidal, on note :

$$\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})^{\star}=\mathrm{cusp}^{-1}(\mathfrak{s})\tag{4.11}$$

l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support cuspidal $\mathfrak{s}$. Si l'on pose $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_1+\cdots+\mathfrak{s}_r$, l'application :

$$(\pi_1,\dots,\pi_r)\mapsto\pi_1\times\cdots\times\pi_r$$

induit une bijection de $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s}_1)^{\star}\times\cdots\times\mathrm{Irr}(\mathfrak{s}_r)^{\star}$ dans $\mathrm{Irr}(\mathfrak{s})^{\star}$.

Démonstration. — Pour chaque i, soit (J_i,λ_i) un type simple maximal contenu dans ρ_i, soit n_i le nombre termes dans $\mathfrak{s}_i$ et soit m_i le degré de ρ_i. On note aussi (K_i,τ_i) le type semi-simple associé à (J_i,λ_i) et n_i par la proposition 2.31. On pose :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}&=\mathrm{G}_{m_1n_1}\times\cdots\times\mathrm{G}_{m_rn_r},\\ \mathrm{K}_{\mathrm{M}}&=\mathrm{K}_1\times\cdots\times\mathrm{K}_r,\\ \tau_{\mathrm{M}}&=\tau_1\otimes\cdots\otimes\tau_r.\end{aligned}$$

On note (K,τ) le type semi-simple associé aux (J_i,λ_i) par la proposition 2.34, qui est une paire couvrante de $(\mathrm{K}_{\mathrm{M}},\tau_{\mathrm{M}})$. L'algèbre $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\mathrm{G},\tau)$ est libre de rang 1 comme module sur $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}=\mathcal{H}(\mathrm{M},\tau_{\mathrm{M}})$. D'après la proposition 4.9, l'induite compacte $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\tau)$ est quasi-projective de type fini. On est donc dans les conditions d'application du corollaire 4.17, dont on déduit que l'induite $\pi_1\times\cdots\times\pi_r$ est irréductible.

Pour le point (2), on remarque que (2.23) fournit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-modules :

$$\mathbf{M}_{\tau}(\pi)\simeq\mathbf{M}_{\tau_{\mathrm{M}}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\pi)),$$

où P est un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M. Puisque $\mathcal{H}$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$, la restriction de $\mathbf{M}_{\tau}(\pi)$ à $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$ est irréductible. C'est donc un module de la forme $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{m}_r$, où $\mathfrak{m}_i$ est un $\mathcal{H}(\mathrm{G}_{m_in_i},\tau_i)$-module irréductible. Puisque l'induite compacte de

τ_i à $\mathrm{G}_{m_i n_i}$ est quasi-projective de type fini, il existe d'après le théorème 4.2 une représentation irréductible π_i de $\mathrm{G}_{m_i n_i}$ telle que $\mathbf{M}_{\tau_i}(\pi_i)$ soit isomorphe à $\mathfrak{m}_i$. En particulier, le support cuspidal de π_i est formé de représentations inertiellement équivalentes à ρ_i. Posons :

$$\pi' = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r,$$

qui est irréductible d'après le point (1). D'après le théorème 4.2 encore, il suffit de prouver que $\mathbf{M}_\tau(\pi)$ et $\mathbf{M}_\tau(\pi')$ sont des $\mathcal{H}$-modules isomorphes pour en déduire que π et π' sont des représentations isomorphes. D'après le corollaire 4.17, on a :

$$\mathbf{M}_\tau(\pi') \simeq \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathcal{H}.$$

La restriction de $\mathbf{M}_\tau(\pi)$ à $\mathcal{H}_\mathrm{M}$ est isomorphe à $\mathfrak{m}$, ce dont on déduit par adjonction que $\mathbf{M}_\tau(\pi)$ est isomorphe à $\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_\mathrm{M}} \mathcal{H}$, ce qui donne le résultat voulu. □

4.3. Compatibilité du foncteur des τ-invariants à l'induction parabolique

Soit $m \geqslant 1$, soit ρ une représentation irréductible cuspidale de G_m, soit (J, λ) un type simple maximal contenu dans ρ et soit $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$ une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme n. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{(mn_1,\dots,mn_r)}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{G}_{mn}$. On note :

$$(\mathrm{K}_n, \tau_n)$$

la paire couvrante de G associée à (J, λ) par la proposition 2.31, on note $\mathcal{H}_n$ son algèbre de Hecke et $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_{\tau_n}$ le foncteur qu'elle définit de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ dans la catégorie des $\mathcal{H}_n$-modules à droite. On note τ_α la restriction de τ_n à $\mathrm{K}_n \cap \mathrm{M}$, qui est isomorphe à la représentation $\tau_{n_1} \otimes \cdots \otimes \tau_{n_r}$ du groupe $\mathrm{K}_\alpha = \mathrm{K}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{K}_{n_r}$. On note $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{n_r}$ son algèbre de Hecke et $\mathbf{M}_\alpha$ le foncteur correspondant de $\mathscr{R}(\mathrm{M})$ dans la catégorie des $\mathcal{H}_\alpha$-modules à droite. Soit :

$$j_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{H}_n \tag{4.12}$$

le morphisme (2.22) correspondant à (K_n, τ_n) considérée comme une paire couvrante de $(\mathrm{K}_\alpha, \tau_\alpha)$.

Proposition 4.20. — *Soit σ une représentation admissible de* M *engendrée par sa composante τ_α-isotypique. On a un isomorphisme de $\mathcal{H}_n$-modules à droite :*

$$\mathbf{M}_n\left(\boldsymbol{i}_{(mn_1,\dots,mn_r)}(\sigma)\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}_n, \mathbf{M}_\alpha(\sigma)). \tag{4.13}$$

Remarque 4.21. — Dans le cas où R est le corps des nombres complexes, ce résultat ne nécessite pas d'hypothèse d'admissibilité sur la représentation σ. Il s'agit d'un cas particulier de [**9**, Corollary 8.4] obtenu à partir de (2.23) par adjonction, en utilisant le fait que $\mathbf{M}_n$ induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ formée des représentations engendrées par leur composante τ_n-isotypique et la catégorie des $\mathcal{H}_n$-modules à droite (et un résultat analogue pour $\mathbf{M}_\alpha$). Quand R est de caractéristique non nulle, ces foncteurs ne définissent pas en général des équivalences de catégories et il faut trouver une autre approche.

Remarque 4.22. — L'hypothèse d'admissibilité provient de ce que notre preuve utilise le lemme 4.15 et une inégalité de la forme (4.16).

Démonstration. — On suppose pour le moment que σ est une représentation (lisse) quelconque de M. On pose $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_{(mn_1,\dots,mn_r)}$ et $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{(mn_1,\dots,mn_r)}$ et on définit des foncteurs :

$$\mathbf{F} : \sigma \mapsto \mathbf{M}_n(\boldsymbol{i}(\sigma)), \quad \mathbf{G} : \sigma \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}_n, \mathbf{M}_\alpha(\sigma))$$

de $\mathscr{R}(\mathrm{M})$ dans la catégorie des $\mathcal{H}_n$-modules à droite. On note respectivement Q_n et Q_α les induites compactes de τ_n à G et de τ_α à M. Compte tenu de la propriété d'adjonction de $\boldsymbol{i}$, on a un isomorphisme fonctoriel de R-espaces vectoriels :

$$\mathbf{F}(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n), \sigma) \tag{4.14}$$

qui est en fait un isomorphisme de $\mathcal{H}_n$-modules à droite. En appliquant (2.23) à Q_n, on obtient le résultat suivant.

Fait 4.23. — *L'isomorphisme* (2.23) *appliqué à la représentation* Q_n *induit un isomorphisme de* $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_\alpha)$*-bimodules de* $\mathcal{H}_n$ *vers* $\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n))$.

Grâce à (4.14) et au fait 4.23, on obtient un homomorphisme de $\mathcal{H}_n$-modules :

$$\boldsymbol{\omega}_\sigma : \mathbf{F}(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n), \sigma) \xrightarrow{\gamma_\sigma} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n)), \mathbf{M}_\alpha(\sigma)) \simeq \mathbf{G}(\sigma) \tag{4.15}$$

qui est fonctoriel en σ, où $\boldsymbol{\gamma}_\sigma$ désigne l'homomorphisme fonctoriel de R-espaces vectoriels obtenu en appliquant le foncteur $\mathbf{M}_\alpha$.

On suppose maintenant que σ est engendrée par sa composante τ_α-isotypique, c'est-à-dire qu'il y a un homomorphisme surjectif :

$$f : \mathrm{Q}_\alpha^{\mathrm{S}} \to \sigma$$

d'une somme directe arbitraire de copies de Q_α vers σ, où S désigne un ensemble quelconque qui indexe la somme directe. Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(\mathrm{Q}_\alpha)^{\mathrm{S}} \arrow[r, "\mathbf{F}(f)"] \arrow[d, "\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Q}_\alpha^{\mathrm{S}}}"'] & \mathbf{F}(\sigma) \arrow[d, "\boldsymbol{\omega}_\sigma"] \\ \mathbf{G}(\mathrm{Q}_\alpha)^{\mathrm{S}} \arrow[r, "\mathbf{G}(f)"'] & \mathbf{G}(\sigma) \end{tikzcd}$$

où les deux flèches horizontales $\mathbf{F}(f)$ et $\mathbf{G}(f)$ sont surjectives car les deux foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont exacts sur la catégorie $\mathscr{E}_\alpha$, d'après les propositions 4.4 et 2.28.

Lemme 4.24. — *Si* $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Q}_\alpha}$ *est un isomorphisme, alors* $\boldsymbol{\omega}_\sigma$ *est un isomorphisme pour toute représentation* σ *admissible et engendrée par sa composante* τ_α*-isotypique.*

Démonstration. — Si $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Q}_\alpha}$ est un isomorphisme, alors $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Q}_\alpha^{\mathrm{S}}}$ est un isomorphisme et $\boldsymbol{\omega}_\sigma$ est donc surjective. On en déduit que :

$$\dim \mathbf{F}(\sigma) \geqslant \dim \mathbf{G}(\sigma). \tag{4.16}$$

On a aussi l'inégalité contraire d'après le lemme 4.15. On en déduit que $\boldsymbol{\omega}_\sigma$ est bijective pour σ admissible et engendrée par sa composante τ_α-isotypique. □

Lemme 4.25. — *L'homomorphisme* $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Q}_\alpha}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Les $\mathcal{H}_n$-modules $\mathbf{F}(\mathrm{Q}_\alpha)$ et $\mathbf{G}(\mathrm{Q}_\alpha)$ sont tous les deux libres de rang 1 d'après (2.24). Il suffit de prouver que l'image par $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Q}_\alpha}$ d'une base de $\mathbf{F}(\mathrm{Q}_\alpha)$ est une base de $\mathbf{G}(\mathrm{Q}_\alpha)$. La base canonique de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n), \mathrm{Q}_\alpha)$ est l'élément e défini par :

$$f \bmod \mathrm{Q}_n(\mathrm{U}) \mapsto \Big(x \mapsto \int_{\mathrm{U}} f(ux)\, du\Big)$$

pour $f \in \mathrm{Q}_n$ et $x \in \mathrm{M}$, où $\mathrm{Q}_n(\mathrm{U})$ désigne le sous-espace de Q_n engendré par les vecteurs de la forme $u \cdot f - f$, avec $f \in \mathrm{Q}_n$ et $u \in \mathrm{U} = \mathrm{U}_{(mn_1,\dots,mn_r)}$. On va calculer son image par $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{Q}_\alpha}$ et vérifier que c'est une base de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n)), \mathbf{M}_\alpha(\mathrm{Q}_\alpha))$. Soit $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\lambda$ le groupe défini au paragraphe 2.5.4, soit $\mathcal{W}_0$ le sous-groupe de $\mathcal{W}$ constitué des matrices de permutation dans $\mathcal{W}$ et soit $\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{W}_0 \cap \mathrm{M}$. Dans chaque classe de $\mathcal{W}_0/\mathcal{W}_\alpha$, il existe un unique élément de longueur minimale ; ces éléments forment un système de représentants de $\mathcal{W}_0/\mathcal{W}_\alpha$ noté $\mathcal{D}_\alpha$.

Pour $w \in \mathcal{W}$, on fixe un élément $\boldsymbol{\tau}_w \in \mathcal{H}_n$ non nul de support $\mathrm{K}_n w \mathrm{K}_n$, qu'on voit comme un élément de $\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n))$.

Fait 4.26. — *$\mathcal{H}_n$ est un $\mathcal{H}_\alpha$-module à droite libre de base $\{\boldsymbol{\tau}_w, w \in \mathcal{D}_\alpha\}$.*

Ceci permet de se restreindre aux $\boldsymbol{\tau}_w$, $w \in \mathcal{D}_\alpha$. Compte tenu de (2.24) et du fait 4.23, l'image de e par $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{Q}_\alpha}$ est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n)), \mathbf{M}_\alpha(\mathrm{Q}_\alpha))$ qui à $\boldsymbol{\tau}_w$ associe :

$$v \mapsto \Big(x \mapsto \int_{\mathrm{U}} \boldsymbol{\tau}_w(v)(ux)\, du\Big) \tag{4.17}$$

pour $w \in \mathcal{D}_\alpha$, $x \in \mathrm{M}$ et pour v dans l'espace de τ, noté $\mathcal{V}$.

Lemme 4.27. — *Pour $w \in \mathcal{W}_0$, on a $\mathrm{K}_n w \mathrm{K}_n \cap \mathrm{P} \neq \varnothing$ si et seulement si $w \in \mathcal{W}_\alpha$.*

Démonstration. — Si $w \in \mathcal{W}_\alpha$, alors $\mathrm{K}_n w \mathrm{K}_n \cap \mathrm{P}$ n'est pas vide parce que :

$$(\mathrm{K}_n \cap \mathrm{M}) w (\mathrm{K}_n \cap \mathrm{M}) \cap \mathrm{M} \neq \varnothing.$$

Inversement, on suppose que $\mathrm{K}_n w \mathrm{K}_n \cap \mathrm{P} \neq \varnothing$. Soit $\mathfrak{A}_n$ l'ordre héréditaire apparaissant dans la construction du paragraphe 2.3.7, que l'on peut supposer standard. Ainsi K_n est inclus dans $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_n)$; on a donc $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_n) w \mathrm{U}(\mathfrak{A}_n) \cap \mathrm{P} \neq \varnothing$. Soit $\mathfrak{A}'$ l'ordre héréditaire standard $\mathfrak{A}_{(m,\dots,m)}$ de $\mathscr{M}_{mn}(\mathrm{D})$. Il contient $\mathfrak{A}_n$, de sorte qu'on a $\mathrm{U}(\mathfrak{A}') w \mathrm{U}(\mathfrak{A}') \cap \mathrm{P} \neq \varnothing$. Soient $\mathcal{W}_{\max}$ le sous-groupe des permutations de $\mathrm{GL}_{mn}(\mathcal{O}_\mathrm{D})$ et $\mathcal{X}_{\max}$ un système de représentants des doubles classes de $\mathcal{W}_{\max}$ modulo $\mathcal{W}_{\max} \cap \mathrm{U}(\mathfrak{A}')$. On note aussi $\mathcal{X}_{\max,\mathrm{M}}$ un système de représentants des doubles classes de $\mathcal{W}_{\max} \cap \mathrm{M}$ modulo $\mathcal{W}_{\max} \cap \mathrm{U}(\mathfrak{A}') \cap \mathrm{M}$. Alors on a :

$$\coprod_{w' \in \mathcal{X}_{\max}} \mathrm{U}(\mathfrak{A}') w' \mathrm{U}(\mathfrak{A}') \cap \mathrm{P} = \mathrm{GL}_{mn}(\mathcal{O}_\mathrm{D}) \cap \mathrm{P} = \coprod_{w' \in \mathcal{X}_{\max,\mathrm{M}}} \mathrm{U}(\mathfrak{A}') w' \mathrm{U}(\mathfrak{A}') \cap \mathrm{P}.$$

On en déduit que w appartient à $\mathcal{X}_{\max,\mathrm{M}}$, donc $w \in \mathcal{W}_0 \cap \mathrm{M} = \mathcal{W}_\alpha$. □

Ce lemme implique que, pour $w \notin \mathcal{W}_\alpha$, $x \in \mathrm{M}$ et $v \in \mathcal{V}$, l'intégrale de (4.17) est nulle. Pour tout $v \in \mathcal{V}$, on note $[1, v]_\mathrm{M}$ l'élément de Q_α de support $\mathrm{K}_n \cap \mathrm{M}$ et prenant en 1 la valeur v. On déduit de ce qui précède que, pour $w \in \mathcal{D}_\alpha$, on a :

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{Q}_\alpha}(e)(\boldsymbol{\tau}_w) = \begin{cases} \text{la fonction } v \mapsto [1, v]_\mathrm{M} & \text{si } w = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En conclusion, $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{Q}_\alpha}(e)$ est une base de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(\boldsymbol{r}(\mathrm{Q}_n)), \mathbf{M}_\alpha(\mathrm{Q}_\alpha))$ comme $\mathcal{H}$-module à droite libre de rang 1. Ceci met fin à la preuve du lemme 4.25. □

La proposition 4.20 se déduit maintenant des lemmes 4.24 et 4.25. □

Corollaire 4.28. — *Soit σ une sous-représentation d'une représentation admissible de* M *engendrée par sa composante τ_α-isotypique. On a un isomorphisme :*

$$\mathbf{M}_n\left(\boldsymbol{i}_{(mn_1,\dots,mn_r)}(\sigma)\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}_n, \mathbf{M}_\alpha(\sigma)) \tag{4.18}$$

de $\mathcal{H}_n$-modules à droite.

Démonstration. — Par hypothèse, il y a des représentations π_1, π_2 admissibles engendrées par leurs composantes τ_α-isotypiques telles qu'on ait une suite exacte :

$$0 \to \sigma \xrightarrow{i} \pi_1 \xrightarrow{f} \pi_2 \to 0$$

dans la catégorie $\mathscr{E}_\alpha$. Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\sigma) \arrow[r, "\mathbf{F}(i)"] \arrow[d, "\boldsymbol{\omega}_\sigma"'] & \mathbf{F}(\pi_1) \arrow[r, "\mathbf{F}(f)"] \arrow[d, "\boldsymbol{\omega}_{\pi_1}"] & \mathbf{F}(\pi_2) \arrow[d, "\boldsymbol{\omega}_{\pi_2}"] \\
\mathbf{G}(\sigma) \arrow[r, "\mathbf{G}(i)"'] & \mathbf{G}(\pi_1) \arrow[r, "\mathbf{G}(f)"'] & \mathbf{G}(\pi_2)
\end{tikzcd}$$

où $\mathbf{F}(i)$ et $\mathbf{G}(i)$ sont injectives et $\mathbf{F}(f)$ et $\mathbf{G}(f)$ surjectives car les foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont exacts sur $\mathscr{E}_\alpha$. Comme $\boldsymbol{\omega}_{\pi_1}$ et $\boldsymbol{\omega}_{\pi_2}$ sont des isomorphismes d'après la proposition 4.20, le lemme du serpent implique que $\boldsymbol{\omega}_\sigma$ est un isomorphisme. □

4.4. Changement de groupe

On reprend les notations du paragraphe précédent. D'après la proposition 4.12, si π est une représentation irréductible de $\mathrm{G} = \mathrm{G}_{mn}$, on a $\mathbf{M}_n(\pi) \neq 0$ si :

$$\mathrm{cusp}(\pi) = [\rho\chi_1] + \cdots + [\rho\chi_n], \quad \chi_i : \mathrm{G}_m \to \mathrm{R}^\times \text{ non ramifié}, \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{4.19}$$

c'est-à-dire si $\mathrm{cusp}(\pi)$ est inertiellement équivalent à $[\rho] + \cdots + [\rho] = n \cdot [\rho]$, support dont la classe d'inertie sera notée $\Omega_{\rho,n}$. D'après la proposition 4.9 et le théorème 4.2, le foncteur $\mathbf{M}_n$ induit une bijection :

$$\boldsymbol{\xi}_n : \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star \to \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_n)$$

entre l'ensemble $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star$ des représentations irréductibles de G de support cuspidal de la forme (4.19) et l'ensemble des classes de $\mathcal{H}_n$-modules à droite irréductibles.

On fixe une extension F′/F comme dans la proposition 2.21 et on pose $\mathrm{G}' = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F}')$. Plus généralement, on ajoutera un $'$ aux notations du paragraphe 4.3 pour désigner les objets correspondant au cas où ρ est le caractère trivial de $\mathrm{F}'^\times$. En particulier, on note M′ et P′ les sous-groupes de Levi et parabolique standards de G′ associés à α. On note I'_n le sous-groupe d'Iwahori standard de G′, on note $\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}(\mathrm{G}', \mathrm{I}'_n)$ son algèbre de Hecke et $\mathbf{M}'_n$ le foncteur $\mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}^{\mathrm{I}'_n}$ de $\mathscr{R}(\mathrm{G}')$ dans la catégorie des $\mathcal{H}'_n$-modules à droite. Il induit une bijection :

$$\boldsymbol{\xi}'_n : \mathrm{Irr}(\Omega_{1_{\mathrm{F}'^\times},n})^\star \to \mathrm{Irr}(\mathcal{H}'_n) \tag{4.20}$$

entre l'ensemble des classes de représentations irréductibles ayant des vecteurs non nuls invariants par I'_n et celui des classes de $\mathcal{H}'_n$-modules à droite irréductibles (voir l'exemple 2.32).

Soit Λ le type simple maximal étendu prolongeant λ tel que la représentation ρ soit isomorphe à l'induite compacte de Λ à G_m (proposition 3.1). Il détermine un isomorphisme de R-algèbres :

$$\Psi : \mathcal{H}(\mathrm{F}'^\times, \mathcal{O}_{\mathrm{F}'}^\times) \to \mathcal{H}(\mathrm{G}_m, \lambda) \tag{4.21}$$

(l'image d'une uniformisante de F' étant égale à Λ), qui permet d'identifier $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}_1)$ à $\mathrm{R}^\times$. On a le lemme suivant, que l'on prouve comme dans [**27**, 4.2].

Lemme 4.29. — *Pour tout caractère non ramifié χ de G_m, on a :*

$$\boldsymbol{\xi}_1(\rho\chi) = \chi(\varpi_\lambda)^{-1}$$

où ϖ_λ est l'élément de G_m défini par (2.15).

Ensuite, on montre le résultat suivant en raisonnant comme dans [**27**, 2.10].

Proposition 4.30. — (1) *Il existe un unique isomorphisme de* R*-algèbres Ψ_n de $\mathcal{H}'_n$ dans $\mathcal{H}_n$ tel que :*

$$\Psi_n \circ j'_{(1,\dots,1)} = j_{(1,\dots,1)} \circ (\Psi \otimes \cdots \otimes \Psi). \tag{4.22}$$

(2) *Si l'on pose $\Psi_\alpha = \Psi_{n_1} \otimes \cdots \otimes \Psi_{n_r}$, alors on a $\Psi_n \circ j'_\alpha = j_\alpha \circ \Psi_\alpha$.*

Pour chaque $n \geqslant 1$, l'isomorphisme Ψ_n définit une équivalence, notée $\boldsymbol{\Psi}_n$, entre la catégorie des $\mathcal{H}_n$-modules à droite et celle des $\mathcal{H}'_n$-modules à droite. Elle induit une bijection, encore notée $\boldsymbol{\Psi}_n$, entre les $\mathcal{H}_n$-modules à droite irréductibles et les $\mathcal{H}'_n$-modules à droite irréductibles. On forme alors la bijection :

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \boldsymbol{\xi}'^{-1}_n \circ \boldsymbol{\Psi}_n \circ \boldsymbol{\xi}_n : \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star \to \mathrm{Irr}(\Omega_{1_{\mathrm{F}'^\times},n})^\star. \tag{4.23}$$

On étudie maintenant la compatibilité de $\boldsymbol{\Phi}_n$ au support cuspidal.

Lemme 4.31. — *Soient $\chi_1, \dots, \chi_n$ des caractères non ramifiés de G_m. Alors $\boldsymbol{\xi}_n$ induit une bijection entre sous-représentations irréductibles de $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$ et sous-modules irréductibles de :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{(1,\dots,1)}}(\mathcal{H}, \boldsymbol{\xi}_1(\rho\chi_1) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}_1(\rho\chi_n)). \tag{4.24}$$

Remarque 4.32. — On a un résultat analogue en remplaçant sous-représentation et sous-module par représentation quotient et module quotient.

Démonstration. — La preuve s'obtient par l'utilisation conjointe des propositions 4.20 et 4.5. □

Proposition 4.33. — *Soit π une représentation irréductible dans $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star$, dont on écrit le support cuspidal sous la forme* (4.19)*. Alors* $\mathrm{cusp}(\boldsymbol{\Phi}_n(\pi)) = \boldsymbol{\Phi}_1(\rho\chi_1) + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_1(\rho\chi_n)$.

Démonstration. — On peut supposer que π est une sous-représentation de l'induite parabolique $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$. D'après le lemme 4.31, $\boldsymbol{\xi}_n(\pi)$ est un sous-module irréductible de (4.24). Si χ est un caractère non ramifié de $\mathrm{F}^\times$, on note χ' le caractère non ramifié de $\mathrm{F}'^\times$ prenant en une uniformisante de F' la même valeur que χ en une uniformisante de F. Ceci définit une bijection $\chi \mapsto \chi'$ entre caractères non ramifiés de G et caractères non ramifiés de G'. Le lemme suivant, qui décrit la compatibilité de $\boldsymbol{\Phi}_n$ à la torsion non ramifiée, découle du lemme 4.29.

Lemme 4.34. — *Pour toute représentation irréductible π et tout caractère non ramifié χ de* G*, on a $\boldsymbol{\Phi}_n(\pi\chi) = \boldsymbol{\Phi}_n(\pi)\chi'$.*

On pose $\pi' = \mathbf{\Phi}_n(\pi)$. Compte tenu du lemme 4.34 et de (4.22), on déduit de ce qui précède que $\boldsymbol{\xi}'_n(\pi')$ est un sous-module irréductible de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}'_{(1,\dots,1)}}(\mathcal{H}', \boldsymbol{\xi}'_1(\chi'_1) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}'_1(\chi'_n)).$$

D'après le lemme 4.31, on en déduit que π' est une sous-représentation de $\chi'_1 \times \cdots \times \chi'_n$, ce qui termine la démonstration de la proposition 4.33. □

Proposition 4.35. — *Pour $i = 1, 2$, soit $n_i \geqslant 1$ un entier et soit π_i une représentation irréductible dans $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n_i})^\star$. On pose $n = n_1 + n_2$. Alors $\pi_1 \times \pi_2$ est irréductible si et seulement si $\mathbf{\Phi}_{n_1}(\pi_1) \times \mathbf{\Phi}_{n_2}(\pi_2)$ est irréductible, auquel cas on a $\mathbf{\Phi}_n(\pi_1 \times \pi_2) = \mathbf{\Phi}_{n_1}(\pi_1) \times \mathbf{\Phi}_{n_2}(\pi_2)$.*

Démonstration. — Pour $i = 1, 2$, on pose $\pi'_i = \mathbf{\Phi}_{n_i}(\pi_i)$. Si l'induite $\pi_1 \times \pi_2$ est irréductible, alors elle appartient à $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star$ et, d'après la proposition 4.20, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}_n$-modules irréductibles :

$$\boldsymbol{\xi}_n(\pi_1 \times \pi_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{(n_1,n_2)}}(\mathcal{H}_n, \boldsymbol{\xi}_{n_1}(\pi_1) \otimes \boldsymbol{\xi}_{n_2}(\pi_2)). \tag{4.25}$$

D'après la proposition 4.20 à nouveau, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}'_n$-modules :

$$\boldsymbol{\xi}'_n(\pi'_1 \times \pi'_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}'_{(n_1,n_2)}}\left(\mathcal{H}'_n, \boldsymbol{\xi}'_{n_1}(\pi'_1) \otimes \boldsymbol{\xi}'_{n_2}(\pi'_2)\right). \tag{4.26}$$

D'après la proposition 4.30, le membre de droite de (4.26) correspond par $\mathbf{\Psi}_n$ au membre de droite de (4.25). On déduit de la proposition 4.13 que $\pi'_1 \times \pi'_2$ est irréductible, puis qu'on a une égalité entre $\mathbf{\Psi}_n \circ \boldsymbol{\xi}_n(\pi_1 \times \pi_2)$ et $\boldsymbol{\xi}'_n(\pi'_1 \times \pi'_2)$. □

On déduit de la proposition 4.5 le corollaire suivant.

Corollaire 4.36. — *On suppose que tous les sous-quotients irréductibles de $\pi_1 \times \pi_2$ sont dans $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star$. Alors $\pi_1 \times \pi_2$ et $\mathbf{\Phi}_{n_1}(\pi_1) \times \mathbf{\Phi}_{n_2}(\pi_2)$ ont la même longueur, et l'une de ces représentations est indécomposable si et seulement si l'autre l'est.*

Démonstration. — On choisit une suite de composition :

$$0 = \mathrm{V}_0 \subsetneq \mathrm{V}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{V}_r = \pi_1 \times \pi_2$$

où les V_i sont des sous-représentations de $\pi_1 \times \pi_2$ telles que, pour tout $i \in \{0, \dots, r-1\}$, le quotient $\mathrm{V}_{i+1}/\mathrm{V}_i$ soit irréductible. Par hypothèse, ces sous-quotients sont dans $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^\star$. On déduit de la proposition 4.5(1) que la longueur de $\mathbf{M}_n(\pi_1 \times \pi_2)$ est égale à la longueur r de $\pi_1 \times \pi_2$. De façon analogue, la longueur de $\mathbf{M}'_n(\mathbf{\Phi}_{n_1}(\pi_1) \times \mathbf{\Phi}_{n_2}(\pi_2))$ est égale à la longueur de $\mathbf{\Phi}_{n_1}(\pi_1) \times \mathbf{\Phi}_{n_2}(\pi_2)$. Le résultat se déduit du fait que $\mathbf{M}_n(\pi_1 \times \pi_2)$ et $\mathbf{M}'_n(\mathbf{\Phi}_{n_1}(\pi_1) \times \mathbf{\Phi}_{n_2}(\pi_2))$ onr la même longueur. Pour l'indécomposabilité, on raisonne de façon analogue en utilisant la proposition 4.5(2). □

4.5. Le caractère ν_ρ associé à une représentation cuspidale

Soient $m \geqslant 1$ un entier et ρ une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$. Au paragraphe 3.4, on a associé à ρ des invariants numériques $n(\rho), s(\rho), f(\rho) \geqslant 1$. On note N_m la norme réduite de $\mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ sur F et $|\ |_{\mathrm{F}}$ la valeur absolue donnant à une uniformisante de F la valeur q^{-1}. Comme l'image de q dans R est inversible, la composée $\nu = |\mathrm{N}_m|_{\mathrm{F}}$ définit un R-caractère non ramifié de G. On pose :

$$\nu_\rho = \nu^{s(\rho)}, \tag{4.27}$$

qui ne dépend que de la classe d'inertie de ρ, et on pose :

$$\mathbb{Z}_\rho = \{[\rho\nu_\rho^i] \mid i \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.28}$$

Il est commode d'introduire la notation :

$$q(\rho) = q^{f(\rho)}. \tag{4.29}$$

Si R est de caractéristique ℓ non nulle, on note :

$$e(\rho) \tag{4.30}$$

l'ordre de $q(\rho)$ dans $\mathbb{F}_\ell^\times$. Si R est de caractéristique nulle, on convient que $e(\rho) = +\infty$. Les deux quantités $q(\rho)$ et $e(\rho)$ ne dépendent que de la classe d'inertie de ρ.

On prouve le résultat important suivant, qui justifie l'introduction de l'invariant ν_ρ.

Proposition 4.37. — *Soit ρ' une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{G}_{m'}$, $m' \geqslant 1$. Alors l'induite $\rho \times \rho'$ est réductible si et seulement si ρ' est isomorphe à $\rho\nu_\rho$ ou $\rho\nu_\rho^{-1}$.*

Démonstration. — D'après le théorème 4.18, il suffit de traiter le cas où ρ et ρ' sont inertiellement équivalentes, c'est-à-dire que ρ et ρ' contiennent un même type simple maximal (J, λ). On forme la paire $(\mathrm{J}_\mathrm{M}, \lambda_\mathrm{M})$ avec $\mathrm{M} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ comme au paragraphe 2.7.1 et on note (K, τ) le type semi-simple donné par la proposition 2.31. Écrivons ρ' sous la forme $\rho\chi$ avec χ un caractère non ramifié de G. D'après la proposition 4.13, l'induite $\rho \times \rho\chi$ est réductible si et seulement si le $\mathcal{H}$-module $\mathbf{M}_\tau(\rho \times \rho\chi)$ est réductible. D'après la proposition 4.20 et le lemme 4.29, ce $\mathcal{H}$-module est induit à partir du caractère $1 \otimes \chi(\varpi_\lambda)^{-1}$ de $\mathcal{H}_\mathrm{M}$. Il est en particulier de dimension 2 sur R. Il est donc réductible si et seulement s'il contient un caractère, ce qui, compte tenu de la description de $\mathcal{H}$ par générateurs et relations dans [**31**, I.3.14], est le cas si et seulement si $\chi(\varpi_\lambda)$ vaut $q(\rho)$ ou $q(\rho)^{-1}$. Un calcul simple montre que la valuation de la norme réduite de $\varpi_\lambda \in \mathrm{G}$ est égale à $f(\rho)s(\rho)^{-1}$, ce dont on déduit l'égalité :

$$\nu_\rho(\varpi_\lambda)^{-1} = q(\rho). \tag{4.31}$$

Le résultat se déduit du fait que, pour qu'un caractère non ramifié ξ de G vérifie $\rho\xi \simeq \rho$, il faut et il suffit que $\xi(\varpi_\lambda) = 1$. □

Corollaire 4.38. — *On utilise les notations du paragraphe 4.4. Soient $a \leqslant b$ dans $\mathbb{Z}$. Alors $\boldsymbol{\xi}_n$ induit une bijection entre sous-représentations irréductible de $\rho\nu_\rho^a \times \rho\nu_\rho^{a+1} \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b$ et sous-modules irréductibles du module induit :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{(1,\ldots,1)}}(\mathcal{H}, q(\rho)^a \otimes \cdots \otimes q(\rho)^b).$$

Remarque 4.39. — On a un résultat analogue en remplaçant sous-représentation et sous-module par représentation quotient et module quotient.

Démonstration. — On utilise les lemme 4.31 et 4.29 et la formule (4.31). □

Remarque 4.40. — D'après la remarque 4.11, si $e(\rho) > 1$, alors $\mathrm{ind}_\mathrm{J}^\mathrm{G}(\lambda)$ est projective pour tout type simple maximal (J, λ) contenu dans ρ.

On termine cette section sur la relation importante suivante, qui est nécessaire à la classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des supercuspidales dans [**21**].

Lemme 4.41. — *On a $e(\rho) = \mathrm{card}\ \mathbb{Z}_\rho$.*

Démonstration. — On suppose que R est de caractéristique ℓ non nulle et on note e l'ordre de q dans $\mathbb{F}_\ell^\times$. Si a, b sont des entiers $\geqslant 1$, on note (a, b) leur plus grand diviseur commun. Pour alléger les notations, on pose $n = n(\rho)$, $s = s(\rho)$ et $f = f(\rho)$.

Lemme 4.42. — *On a* $(e, n(e, s)) = (e, ns)$.

Démonstration. — Soit $u \geqslant 1$ un entier divisant e et ns. Écrivons $u_1 = (u, n)$ et $u_2 = u/(u, n)$. On a donc $u = u_1 u_2$ avec u_1 divisant n et u_2 divisant s. Comme u divise e, l'entier u_2 divise (e, s), donc u divise $n(e, s)$, ce qui prouve le résultat attendu. □

Pour calculer le cardinal de $\mathbb{Z}_\rho$, on fait opérer sur la classe inertielle Ω_ρ le groupe cyclique engendré par ν_ρ. Ce groupe cyclique est d'ordre $e/(e, s)$. On obtient donc :

$$\mathrm{card}\ \mathbb{Z}_\rho = \frac{e/(e,s)}{(n, e/(e,s))} = \frac{e}{(e, n(e,s))} = \frac{e}{(e, ns)},$$

la dernière égalité provenant du lemme 4.42. Par définition, l'entier $e(\rho)$ est égal à $e/(e, f)$. Le résultat provient alors de la formule (3.8) et du fait que e est premier à ℓ. □

5. Le foncteur K

Dans cette section, on définit un outil technique important permettant de faire un lien entre la théorie des représentations de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ et celle d'un groupe linéaire général sur un corps fini de caractéristique p. Plus précisément, on associe à un caractère simple maximal de G un foncteur $\mathbf{K}$ de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ dans la catégorie des représentations de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k})$, où l'entier $m' \geqslant 1$ et le corps fini $\mathfrak{k}$ ne dépendent que du caractère simple. Cette section est consacrée à la définition et à l'étude des propriétés de ce foncteur.

5.1. Définition

Soit un entier $m \geqslant 1$ et soit $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$. On fixe un caractère simple *maximal* :

$$\theta_{\max} \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_{\max}, 0, \beta) \tag{5.1}$$

de G, c'est-à-dire un caractère simple défini relativement à un ordre $\mathfrak{A}_{\max}$ qui est maximal parmi les ordre héréditaires $\mathrm{F}(\beta)$-purs de $\mathrm{A} = \mathscr{M}_m(\mathrm{D})$ et qu'on supposera standard. En d'autres termes, si B est le centralisateur de $\mathrm{E} = \mathrm{F}(\beta)$ dans A, alors $\mathfrak{B}_{\max} = \mathfrak{A}_{\max} \cap \mathrm{B}$ est un ordre maximal de B.

Remarque 5.1. — Un caractère simple est maximal si et seulement son induite compacte à G possède un quotient irréductible cuspidal.

Ce caractère simple maximal étant fixé, on fixe un isomorphisme de E-algèbres :

$$\Phi : \mathrm{B} \to \mathscr{M}_{m'}(\mathrm{D}') \tag{5.2}$$

envoyant $\mathfrak{B}_{\max}$ sur l'ordre maximal standard $\mathscr{M}_{m'}(\mathcal{O}_{\mathrm{D}'})$ (voir la remarque 2.13). Dans la suite, on identifiera B à l'algèbre $\mathscr{M}_{m'}(\mathrm{D}')$ par l'intermédiaire de (5.2). On fixe une β-extension $\kappa_{\max}$ de $\theta_{\max}$ et on pose :

$$\mathrm{J}_{\max} = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}_{\max}), \quad \mathrm{J}^1_{\max} = \mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A}_{\max}), \quad \bar{\mathrm{G}} = \mathrm{J}_{\max}/\mathrm{J}^1_{\max}.$$

Le groupe $\bar{\mathrm{G}}$ est canoniquement isomorphe au quotient $\mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\max})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_{\max})$, qu'on identifie au groupe $\mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$. Étant donnée une représentation (π, V) de G, on pose :

$$\mathrm{V}(\kappa_{\max}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_{\max}}(\kappa_{\max}, \mathrm{V}) \tag{5.3}$$

que l'on munit de l'action de $\mathrm{J}_{\max}$ définie, pour $x \in \mathrm{J}_{\max}$ et $f \in \pi(\kappa_{\max})$, par la formule :

$$x \cdot f = \pi(x) \circ f \circ \kappa_{\max}(x)^{-1}. \tag{5.4}$$

Pour cette action, $\mathrm{J}^1_{\max}$ opère trivialement, de sorte que (5.4) définit une représentation de $\bar{\mathrm{G}}$ sur (5.3), que l'on note $\pi(\kappa_{\max})$. On définit ainsi un foncteur exact :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\kappa_{\max},\Phi} : \pi \mapsto \pi(\kappa_{\max}) \tag{5.5}$$

de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ dans la catégorie $\mathscr{R}(\bar{\mathrm{G}})$ des représentations de $\bar{\mathrm{G}}$. Il apparaît dans [**31, 32**], puis dans [**23**] dans le cas complexe. Comme toute représentation lisse irréductible de G est admissible, ce foncteur préserve le fait d'être de longueur finie.

Remarque 5.2. — Ce foncteur dépend des choix effectués :

(1) Choisissons une autre β-extension de $\theta_{\max}$, qu'on peut écrire $(\kappa_{\max})^{\chi}$ avec χ un caractère de $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}^{\times}$ (voir le lemme 2.4). Étant donnée une représentation π de G, les représentations $\pi(\kappa_{\max})$ et $\pi((\kappa_{\max})^{\chi})$ sont tordues l'une de l'autre par le caractère $\chi \circ \mathfrak{n} \circ \det$, où $\mathfrak{n}$ est la norme de $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}$ sur $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}$.

(2) Choisissons un autre isomorphisme (5.2). D'après le théorème de Skolem-Noether, il diffère du premier par un automorphisme de conjugaison par un élément du $\mathrm{GL}_{m'}(\mathrm{D}')$-normalisateur de $\mathscr{M}_{m'}(\mathcal{O}_{\mathrm{D}'})$. Cet automorphisme induit sur $\pi(\kappa_{\max})$ un automorphisme de conjugaison par un élément du produit semi-direct $\Gamma \rtimes \bar{\mathrm{G}}$ avec $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}/\mathfrak{k}_{\mathrm{E}})$.

5.2. Conditions d'annulation

On étudie maintenant des conditions d'annulation du foncteur $\mathbf{K}$ qui seront importantes par la suite. On commence par le cas simple suivant.

Lemme 5.3. — *Soit ρ une représentation irréductible cuspidale de* G.

(1) *Si ρ ne contient pas $\theta_{\max}$, alors* $\mathbf{K}(\rho) = 0$.

(2) *Sinon, il existe une représentation irréductible cuspidale σ de $\bar{\mathrm{G}}$ telle que ρ contienne le type simple maximal $\kappa_{\max} \otimes \sigma$, et on a :*

$$\mathbf{K}(\rho) = \sigma \oplus \sigma^{\phi} \oplus \cdots \oplus \sigma^{\phi^{b(\rho)-1}}, \tag{5.6}$$

où $b(\rho)$ est l'invariant associé à ρ au §3.4 et ϕ l'automorphisme de Frobenius de $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}/\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}$.

Remarque 5.4. — Dans le cas où D est égale à F, on a toujours $b(\rho) = 1$ et $\mathbf{K}(\rho) = \sigma$ dans le cas de figure (2).

Démonstration. — D'après le lemme 3.10, toute représentation irréductible cuspidale ρ de G contenant $\theta_{\max}$ contient un type simple maximal de la forme $\kappa_{\max} \otimes \sigma$ où σ est une représentation irréductible cuspidale de $\bar{\mathrm{G}}$. On fixe un type simple maximal étendu Λ prolongeant $\kappa_{\max} \otimes \sigma$ tel que ρ soit isomorphe à l'induite compacte de Λ à G. La formule (5.6) est alors une conséquence du lemme 3.2. □

Corollaire 5.5. — *Soient ρ et ρ' des représentations irréductibles cuspidales de* G *contenant $\theta_{\max}$. Alors ρ et ρ' sont inertiellement équivalentes si et seulement si $\mathbf{K}(\rho)$ et $\mathbf{K}(\rho')$ sont isomorphes.*

La question de savoir si un caractère simple apparaît ou non dans une représentation irréductible cuspidale est liée à la notion d'endo-classe que nous n'avons fait que mentionner au paragraphe 2.2.3. On note :

$$\boldsymbol{\Theta}_{\max} \tag{5.7}$$

la F-endo-classe associée à $\theta_{\max}$, que nous ne définirons pas (voir [**4**] pour une définition). La définition suivante nous suffira.

Définition 5.6. — Une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{G}_{m'}$, $m' \geqslant 1$, est dite *d'endo-classe* $\boldsymbol{\Theta}_{\max}$ si elle contient un caractère simple qui est un transfert de $\theta_{\max}$.

La série de lemmes qui suit a pour objectif le corollaire 5.10 et la proposition 5.11.

Lemme 5.7. — *Soient* (J, λ) *un type simple et* (K', τ') *un type semi-simple dans* G. *On suppose que* λ *est un sous-quotient de la restriction de* $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}'}^{\mathrm{G}}(\tau')$ *à* J. *Alors :*

(1) (K', τ') *contient un caractère simple* $\theta' \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}', 0, \beta')$ *;*

(2) *le caractère* θ' *et le caractère simple* θ *contenu dans* λ *sont transferts l'un de l'autre.*

Démonstration. — Si R est de caractéristique nulle, l'hypothèse implique qu'il existe un morphisme non nul de $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda)$ dans $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}'}^{\mathrm{G}}(\tau')$. Soit π un quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{G}}(\lambda)$ contenu dans l'image de ce morphisme. Comme (K', τ') est un type pour G (voir [**29**]), la catégorie des représentations engendrées par leur composante τ'-isotypique est stable par sous-quotients dans $\mathscr{R}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$, donc π contient à la fois λ et τ'. Le résultat vient alors de la classification des types semi-simples dans [**29**].

On suppose maintenant que le corps R est de caractéristique ℓ non nulle. Comme toutes les représentations considérées sont lisses sur des sous-groupes ouverts compacts, elles sont définies sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ (voir [**31**, II.4]), de sorte qu'il suffit de prouver le résultat pour $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$. On suppose donc qu'on est dans ce cas, ce qui permet d'utiliser le procédé de réduction modulo ℓ. On fixe un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-type semi-simple $\tilde{\tau}'$ relevant τ' (proposition 2.44) et un facteur irréductible $\tilde{\delta}$ de la restriction de $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}'}^{\mathrm{G}}(\tilde{\tau}')$ à J dont la réduction modulo ℓ admet λ pour sous-quotient. On note $\tilde{\theta}$ le relèvement de θ et on fixe une β-extension $\tilde{\kappa}$ de $\tilde{\theta}$.

Lemme 5.8. — *Soit* π *une représentation irréductible d'un* p*-groupe fini* H *telle que* $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ *possède des vecteurs* H*-invariants non nuls. Alors* π *est le caractère trivial de* H.

Démonstration. — On procède par récurrence sur le cardinal de H. Si H est d'ordre p, il est cyclique et π est un caractère. Les valeurs prises par π sont des racines p-ièmes de l'unité, et ce sont aussi des racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ puisque $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ est trivial. On en déduit que π est trivial.

On suppose maintenant que H est d'ordre $> p$ et on note V l'espace de π. Comme H est résoluble, il possède un sous-groupe H' distingué et d'indice p. La restriction de V à H' admet un facteur irréductible W dont la réduction possède des vecteurs H-invariants non nuls. Par hypothèse de récurrence, W est de dimension 1 et H' agit dessus trivialement. Il existe donc un H'-homomorphisme non trivial du caractère trivial de H' vers la restriction de V à H'. Par réciprocité de Frobenius, il existe un H-homomorphisme non trivial :

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{H}'}^{\mathrm{H}}(1) \to \mathrm{V}.$$

Puisque V est irréductible, cet homomorphisme est surjectif, donc V est un facteur direct de $\mathrm{ind}_{\mathrm{H}'}^{\mathrm{H}}(1)$, ce dont on déduit que V est une représentation irréductible de H triviale sur H′. Puisque H/H′ est cyclique, V est de dimension 1. On termine comme dans le cas où H est d'ordre p. □

Lemme 5.9. — *Il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible $\tilde{\xi}$ de* J *triviale sur* J^1 *tels que $\tilde{\delta}$ soit isomorphe à $\tilde{\kappa} \otimes \tilde{\xi}$.*

Démonstration. — On note $\tilde{\delta}^1$ la restriction de $\tilde{\delta}$ au pro-p-groupe $\mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A})$. Sa réduction modulo ℓ contient θ. En appliquant le lemme 5.8 à $\tilde{\delta}^1\tilde{\theta}^{-1}$, on en déduit que $\tilde{\delta}^1$ contient $\tilde{\theta}$. On conclut en appliquant le lemme 2.16. □

Soit $\tilde{\pi}$ un sous-quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}'}^{\mathrm{G}}(\tilde{\lambda}')$ contenant $\tilde{\delta}$, qui est de la forme donnée par le lemme 5.9. Si $\tilde{\xi}$ n'est pas cuspidale, une manipulation classique permet de remplacer $\tilde{\delta}$ par un type semi-simple $\tilde{\delta}''$ de la forme $\tilde{\kappa}'' \otimes \tilde{\xi}''$, où $\tilde{\xi}''$ est dans le support cuspidal de $\tilde{\xi}$, et ce type semi-simple apparaît dans $\tilde{\pi}$. En reprenant l'argument utilisé dans le cas où R est de caractéristique nulle, on trouve que $\tilde{\pi}$ contient les types semi-simples $\tilde{\lambda}'$ et $\tilde{\delta}''$, ce qui implique que :

(1) $(\mathrm{K}', \tilde{\lambda}')$ contient un caractère simple $\tilde{\theta}' \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A}', 0, \beta')$;

(2) le caractère $\tilde{\theta}'$ et le caractère $\tilde{\theta}$ sont transferts l'un de l'autre.

À partir de là, on obtient le résultat voulu par réduction modulo ℓ. □

Corollaire 5.10. — *Soient $\rho_1, \dots, \rho_n$ des représentations irréductibles cuspidales. On suppose que l'induite $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ possède un sous-quotient irréductible cuspidal π d'endoclasse $\boldsymbol{\Theta}_{\max}$. Alors $\rho_1, \dots, \rho_n$ et π sont toutes d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}_{\max}$.*

Démonstration. — Pour chaque i, on note m_i le degré de ρ_i. On pose $\alpha = (m_1, \dots, m_n)$ et on note m la somme des m_i. Soit $(\mathrm{J}_\alpha, \lambda_\alpha)$ un type simple maximal de M_α contenu dans $\varrho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n$. Soit (K, τ) un type semi-simple de G_m qui est une paire couvrante de $(\mathrm{J}_\alpha, \lambda_\alpha)$. Soit π un sous-quotient irréductible cuspidal de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ et soit (J, λ) un type simple maximal contenu dans π. Comme $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ est un quotient de $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_m}(\tau)$, le type simple λ est un sous-quotient de la restriction de $\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_m}(\tau)$ à J. D'après le lemme 5.7, les représentations $\rho_1, \dots, \rho_n$ sont toutes d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}_{\max}$. □

Proposition 5.11. — *Soient $\rho_1, \dots, \rho_n$ des représentations irréductibles cuspidales de même endo-classe $\boldsymbol{\Theta}_{\max}$. Soit π un sous-quotient irréductible de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ de support cuspidal noté $[\tau_1] + \cdots + [\tau_r]$. Alors $\tau_1, \dots, \tau_r$ sont toutes d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}_{\max}$ et la représentation $\mathbf{K}(\pi)$ est non nulle.*

Démonstration. — On pose $\gamma = (\deg(\tau_1), \dots, \deg(\tau_r))$. Le module de Jacquet $\boldsymbol{r}_\gamma(\boldsymbol{i}_\alpha(\varrho))$ a pour sous-quotient irréductible la représentation cuspidale $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$. En appliquant le corollaire 5.10 à chacun des τ_i, on obtient le résultat annoncé. □

5.3. Compatibilité à l'induction parabolique

On prouve dans ce paragraphe une propriété de compatibilité de $\mathbf{K}$ à l'induction parabolique (proposition 5.12). Soit $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme m, ce qui définit une décomposition :

$$\mathrm{D}^m = \mathrm{D}^{m_i} \oplus \cdots \oplus \mathrm{D}^{m_r} \tag{5.8}$$

en D-espaces vectoriels à droite. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on pose $\mathrm{A}_i = \mathscr{M}_{m_i}(\mathrm{D})$. On suppose que E stabilise la décomposition (5.8), c'est-à-dire que E est contenu dans la sous-algèbre diagonale $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_r \subseteq \mathrm{A}$. On note B_i le centralisateur de E dans A_i. Compte tenu de l'hypothèse faite sur E, le produit $\mathrm{B}_1 \times \cdots \times \mathrm{B}_r$ s'identifie à une sous-E-algèbre de B. On fixe :

A1 un caractère simple maximal $\theta_{\max,i} \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_{\max,i}, 0, \beta)$ de G_{m_i}, pour un ordre héréditaire E-pur maximal standard $\mathfrak{A}_{\max,i}$ de A_i, d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}_{\max}$;

A2 une β-extension $\kappa_{\max,i}$ de $\theta_{\max,i}$.

On note Φ_i l'isomorphisme de E-algèbres de B_i dans $\mathscr{M}_{m'_i}(\mathrm{D}')$ obtenu par restriction de Φ à B_i, et on pose $\bar{\mathrm{G}}_i = \mathrm{J}_{\max,i}/\mathrm{J}^1_{\max,i}$, qu'on identifie à $\mathrm{GL}_{m'_i}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$. Ces données définissent pour chaque i un foncteur $\mathbf{K}_i$ de $\mathscr{R}(\mathrm{G}_{m_i})$ dans $\mathscr{R}(\bar{\mathrm{G}}_i)$. On définit aussi un foncteur :

$$\mathbf{K}_\alpha : \pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_{\max,\alpha}}(\kappa_{\max,\alpha}, \pi)$$

de $\mathscr{R}(\mathrm{M}_\alpha)$ dans $\mathscr{R}(\bar{\mathrm{M}}_\alpha)$, où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_{\max,\alpha} &= \mathrm{J}_{\max,1} \times \cdots \times \mathrm{J}_{\max,r}, \\ \mathrm{J}^1_{\max,\alpha} &= \mathrm{J}^1_{\max,1} \times \cdots \times \mathrm{J}^1_{\max,r}, \\ \kappa_{\max,\alpha} &= \kappa_{\max,1} \otimes \cdots \otimes \kappa_{\max,r} \end{aligned}$$

ainsi que $\bar{\mathrm{M}}_\alpha = \mathrm{J}_{\max,\alpha}/\mathrm{J}^1_{\max,\alpha}$, qui est canoniquement isomorphe au sous-groupe de Levi standard $\bar{\mathrm{G}}_1 \times \cdots \times \bar{\mathrm{G}}_r$ de $\bar{\mathrm{G}}$. On note $\mathfrak{A}$ l'ordre principal standard de A tel que $\mathfrak{A} \cap \mathrm{A}_i = \mathfrak{A}_{\max,i}$ pour tout i. Soient θ le transfert de $\theta_{\max}$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ et κ le transfert de $\kappa_{\max}$ en une β-extension de θ. On suppose que :

A3 la représentation de $\mathrm{J} \cap \mathrm{M}_\alpha$ sur l'espace des vecteurs $\mathrm{J} \cap \mathrm{U}_\alpha$-invariants de κ est isomorphe à $\kappa_{\max,\alpha}$.

On a le résultat suivant.

Proposition 5.12. — *Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit π_i une représentation irréductible de G_{m_i}. Alors on a un isomorphisme de représentations de $\bar{\mathrm{G}}$:*

$$\mathbf{K}(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r) \simeq \mathbf{K}_1(\pi_1) \times \cdots \times \mathbf{K}_r(\pi_r).$$

Démonstration. — Le résultat est vrai dans le cas où R est de caractéristique nulle : la preuve de Schneider et Zink [**23**, Proposition 5.7] est encore valable. On peut donc supposer que R est de caractéristique ℓ non nulle. On procède par récurrence sur α.

Lemme 5.13. — *Pour toute représentation π de M_α, il existe un homomorphisme injectif :*

$$\kappa_{\max} \otimes \bar{\boldsymbol{\iota}}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi)) \to \boldsymbol{i}_\alpha(\pi) \tag{5.9}$$

de représentations de $\mathrm{J}_{\max}$, où $\bar{\boldsymbol{\iota}}_\alpha$ désigne l'induction parabolique de $\bar{\mathrm{M}}_\alpha$ à $\bar{\mathrm{G}}$.

Démonstration. — On reprend la première partie de la preuve de [**31**, III.5.12], en utilisant la proposition 2.18. □

En appliquant le foncteur exact $\mathbf{K}$, on déduit du lemme 5.13, pour toute représentation π de M_α, un homomorphisme injectif :

$$\bar{\boldsymbol{\iota}}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi)) \to \mathbf{K}(\boldsymbol{i}_\alpha(\pi)) \tag{5.10}$$

de représentations de $\bar{\mathrm{G}}$.

Soient $\pi = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ une représentation irréductible de M_α et ϱ' une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi $\mathrm{M}_{\alpha'}$ de M_α dont l'induite à M_α, notée π', admet une sous-représentation isomorphe à π. Au moyen du lemme 5.13, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\boldsymbol{\iota}}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi)) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\boldsymbol{i}_\alpha(\pi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\boldsymbol{\iota}}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi')) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\boldsymbol{i}_\alpha(\pi')) \end{array}$$

où, par hypothèse de récurrence, on peut remplacer la ligne du bas par le morphisme injectif :

$$\bar{\boldsymbol{\iota}}_{\alpha'}(\mathbf{K}_{\alpha'}(\varrho')) \to \mathbf{K}(\boldsymbol{i}_{\alpha'}(\varrho')). \tag{5.11}$$

La surjectivité de (5.11) implique donc celle de (5.10), et l'on a ramené la preuve de la proposition 5.12 au cas où les π_i sont irréductibles et cuspidales. Supposons donc qu'il en est ainsi. Quitte à tordre π par un caractère non ramifié de M_α, on peut supposer que son caractère central est à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, donc que π est définie sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Il suffit donc de prouver le résultat dans le cas où $\mathrm{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, ce que l'on suppose désormais.

Lemme 5.14. — *Soit $\tilde{\kappa}_{\max}$ une β-extension relevant $\kappa_{\max}$, et soit $\tilde{\mathbf{K}}$ le foncteur associé. Pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière $\tilde{\pi}$ de longueur finie de* G, *on a* $\mathbf{r}_\ell([\tilde{\mathbf{K}}(\tilde{\pi})]) = [\mathbf{K}(\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}))]$.

Démonstration. — Il suffit de le prouver pour une représentation irréductible. Soient $\mathfrak{k}_{\max}$ une structure entière de $\kappa_{\max}$ et $\mathfrak{l}$ une structure entière de $\tilde{\pi}$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_{\max}}(\mathfrak{k}_{\max}, \mathfrak{l})$ est une structure entière de $\mathbf{K}(\tilde{\pi})$. □

D'après la proposition 3.22, il y a une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\pi}$ de M_α telle que $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}) \geqslant [\pi]$. Comme le résultat est valable en caractéristique 0, on a un isomorphisme :

$$\bar{\boldsymbol{\iota}}_\alpha(\tilde{\mathbf{K}}_\alpha(\tilde{\pi})) \to \tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{i}_\alpha(\tilde{\pi})) \tag{5.12}$$

de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de $\bar{\mathrm{G}}$. Compte tenu du lemme 5.14, ceci implique que (5.10) est un isomorphisme de représentations de $\bar{\mathrm{G}}$. □

Remarque 5.15. — On a en fait prouvé que, pour toute représentation π de longueur finie de M_α, l'homomorphisme injectif (5.10) est un isomorphisme de représentations de $\bar{\mathrm{G}}$.

Corollaire 5.16. — *Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit ρ_i une représentation irréductible cuspidale de G_{m_i} contenant $\theta_{\max,i}$ et soit $(\mathrm{J}_{\max,i}, \kappa_{\max,i} \otimes \sigma_i)$ un type simple maximal contenu dans ρ_i. Alors :*

$$\mathbf{K}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r) = \bigoplus_{i_1} \cdots \bigoplus_{i_r} \sigma_1^{\phi^{i_1}} \times \cdots \times \sigma_r^{\phi^{i_r}}, \tag{5.13}$$

où ϕ est un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}/\mathfrak{k}_{\mathrm{E}})$ *et où chaque i_j décrit* $\{0, \ldots, b(\rho_j) - 1\}$.

5.4. Compatibilité à la restriction parabolique

On prouve maintenant une propriété de compatibilité de $\mathbf{K}$ à la restriction parabolique (proposition 5.18). On pose $\mathrm{G} = \mathrm{G}_m$.

Soit $\bar{\mathrm{P}} = \bar{\mathrm{M}}\bar{\mathrm{U}}$ un sous-groupe parabolique standard de $\bar{\mathrm{G}}$. Il lui correspond un ordre héréditaire standard $\mathfrak{B}$ de B tel que :

$$\bar{\mathrm{P}} = \mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}^1_{\max}/\mathrm{J}^1_{\max} \simeq \mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_{\max}), \quad \bar{\mathrm{U}} = \mathrm{U}^1(\mathfrak{B})\mathrm{J}^1_{\max}/\mathrm{J}^1_{\max} \simeq \mathrm{U}^1(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_{\max})$$

et on a alors un isomorphisme canonique $\bar{\mathrm{M}} \simeq \mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$. Soit $\mathfrak{A}$ un ordre héréditaire E-pur de A tel que $\mathfrak{A} \cap \mathrm{B} = \mathfrak{B}$ et qui soit propre au sens de [**26**, Définition 4.7]. Soit θ le transfert de $\theta_{\max}$ dans $\mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ et soit κ le transfert de $\kappa_{\max}$ contenant θ. Toute représentation du groupe $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$ triviale sur $\mathrm{J}^1 = \mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$ peut être vue comme une représentation de $\bar{\mathrm{M}}$. On note $\boldsymbol{\iota}_{\bar{\mathrm{P}}}^{\bar{\mathrm{G}}}$ le foncteur d'induction parabolique de $\bar{\mathrm{M}}$ à $\bar{\mathrm{G}}$.

Proposition 5.17. — *Soit π une représentation de* G*, et soit $\bar{\mathrm{P}} = \bar{\mathrm{M}}\bar{\mathrm{U}}$ un sous-groupe parabolique standard de $\bar{\mathrm{G}}$.*

(1) *On a un isomorphisme canonique de représentations de $\bar{\mathrm{M}}$:*

$$\mathbf{K}(\pi)^{\bar{\mathrm{U}}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\kappa, \pi). \tag{5.14}$$

(2) *Pour toute représentation irréductible ξ de* J *triviale sur* J^1*, on a un homomorphisme injectif de* R*-algèbres :*

$$\mathrm{End}_{\bar{\mathrm{G}}}(\boldsymbol{\iota}_{\bar{\mathrm{P}}}^{\bar{\mathrm{G}}}(\xi)) \simeq \mathcal{H}(\mathrm{J}_{\max}, \kappa_{\max}|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B})\mathrm{J}^1_{\max}} \otimes \xi) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathrm{G}, \kappa \otimes \xi) \tag{5.15}$$

et un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{M}}}(\xi, \mathbf{K}(\pi)^{\bar{\mathrm{U}}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}}(\kappa \otimes \xi, \pi) \tag{5.16}$$

de $\mathrm{End}_{\bar{\mathrm{G}}}(\boldsymbol{\iota}_{\bar{\mathrm{P}}}^{\bar{\mathrm{G}}}(\xi))$*-modules.*

Démonstration. — On prouve l'assertion (1) comme dans [**23**, 5] grâce aux propriétés de transfert entre β-extensions, et on obtient (5.15) au moyen du lemme 2.18. Enfin, on a des isomorphismes de R-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}}(\kappa \otimes \xi, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{M}}}(\xi, \mathbf{K}(\pi)^{\bar{\mathrm{U}}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{G}}}(\boldsymbol{\iota}_{\bar{\mathrm{P}}}^{\bar{\mathrm{G}}}(\xi), \mathbf{K}(\pi))$$

et on vérifie qu'ils sont $\mathrm{End}_{\bar{\mathrm{G}}}(\boldsymbol{\iota}_{\bar{\mathrm{P}}}^{\bar{\mathrm{G}}}(\xi))$-équivariants. □

Expliquons comment $\bar{\mathrm{P}} = \bar{\mathrm{M}}\bar{\mathrm{U}}$ définit un sous-groupe parabolique P = MU de G. On fixe un $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{D}$-module à gauche simple S et on forme le B-module à gauche simple :

$$\mathrm{V}_{\mathrm{B}} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{E}\otimes_{\mathrm{F}}\mathrm{D}}(\mathrm{S}, \mathrm{D}^m).$$

La E-algèbre opposée à $\mathrm{End}_{\mathrm{B}}(\mathrm{V}_{\mathrm{B}})$ est isomorphe à D′. On note $(e_1, \ldots, e_{m'})$ une base de V_{B} sur D′ définissant l'isomorphisme (5.2). Un sous-groupe parabolique standard $\bar{\mathrm{P}}$ de $\bar{\mathrm{G}}$ correspond à un drapeau de cette base, qui définit lui-même un drapeau de V_{B}, mais aussi un drapeau de D^m par équivalence de Morita (voir [**26**]). Ce dernier drapeau définit un sous-groupe parabolique P de G tel que :

$$\bar{\mathrm{P}} = (\mathrm{P} \cap \mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\max}))\mathrm{J}^1_{\max}/\mathrm{J}^1_{\max}. \tag{5.17}$$

De façon analogue, le facteur de Levi standard $\bar{\mathrm{M}}$ de $\bar{\mathrm{P}}$ définit un facteur de Levi M de P tel que :

$$\bar{\mathrm{M}} = (\mathrm{M} \cap \mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\max}))\mathrm{J}^1_{\max}/\mathrm{J}^1_{\max}. \tag{5.18}$$

On note $\varkappa$ la représentation de $\mathrm{K} = \mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A})(\mathrm{J}\cap\mathrm{P})$ définie au paragraphe 2.7.2 et dont l'induite à J est isomorphe à κ. (L'hypothèse de propreté faite sur $\mathfrak{A}$ plus haut correspond à la condition sur $\mathfrak{A}$ au paragraphe 2.7.2.) D'après la proposition 2.33, la paire $(\mathrm{K}, \varkappa \otimes \sigma)$ est un type semi-simple de G.

Comme au paragraphe 5.3, soit $\alpha = (m_1, \ldots, m_r)$ une famille d'entiers $\geqslant 1$ de somme m. On suppose que $\bar{\mathrm{P}} = \bar{\mathrm{M}}\bar{\mathrm{U}}$ correspond au sous-groupe parabolique standard $\mathrm{P}_\alpha = \mathrm{M}_\alpha\mathrm{U}_\alpha$.

Proposition 5.18. — *Soit π une représentation de* G. *L'application naturelle :*
$$\mathbf{K}(\pi)^{\bar{\mathrm{U}}} \to \mathbf{K}_\alpha(\boldsymbol{r}_\alpha(\pi))$$
est un isomorphisme de représentations de $\bar{\mathrm{M}}$.

Démonstration. — On commence par remarquer qu'on a des isomorphismes :
$$\mathbf{K}(\pi)^{\bar{\mathrm{U}}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\kappa, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^1}(\varkappa, \pi)$$
de représentations de $\bar{\mathrm{M}}$ d'une part, et que :
$$\mathbf{K}_\alpha(\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_{\max,\alpha}}(\kappa_{\max,\alpha}, \boldsymbol{r}_\alpha(\pi))$$
d'autre part. Pour obtenir le résultat voulu, il suffit d'après (2.23) de prouver le lemme suivant.(1)

Lemme 5.19. — *La paire* $(\mathrm{K}^1, \varepsilon)$ *est une paire couvrante de* $(\mathrm{J}^1_{\max,\alpha}, \eta_{\max,\alpha})$.

Démonstration. — D'après [**1**, page 246], il suffit de prouver que, pour toute représentation π de M, l'application :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^1}(\varkappa, \pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_{\max,\alpha}}(\kappa_{\max,\alpha}, \boldsymbol{r}_\alpha(\pi)) \tag{5.19}$$

est injective, ce qu'on va faire par récurrence sur α. Soit π une représentation de M. On considère (5.19) comme un homomorphisme de représentations de $\mathrm{K}/\mathrm{K}^1 \simeq \bar{\mathrm{M}}$. On note $\mathcal{V}$ son noyau, qui est de dimension finie, et on suppose que $\mathcal{V}$ est non nul. Il existe donc un sous-groupe de Levi $\bar{\mathrm{M}}' \subseteq \bar{\mathrm{M}}$ et une représentation irréductible cuspidale σ' de $\bar{\mathrm{M}}'$ telle que $\mathcal{V}$ possède une sous-représentation de support cuspidal $(\bar{\mathrm{M}}', \sigma')$. Si $\bar{\mathrm{M}}' = \bar{\mathrm{M}}$, on calcule la composante σ'-isotypique, ce qui donne une suite exacte :
$$0 \to \mathcal{V}^{\sigma'} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\varkappa \otimes \sigma', \pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_{\max,\alpha}}(\kappa_{\max,\alpha} \otimes \sigma', \boldsymbol{r}_\alpha(\pi))$$
d'espaces vectoriels. Comme $(\mathrm{K}, \varkappa \otimes \sigma')$ est une paire couvrante de $(\mathrm{J}_{\max,\alpha}, \kappa_{\max,\alpha} \otimes \sigma')$ d'après la proposition 2.33, on a $\mathcal{V}^{\sigma'} = 0$, ce qui contredit le fait que σ' est une sous-représentation de $\mathcal{V}$.

On suppose maintenant que $\bar{\mathrm{M}}'$ est un sous-groupe de Levi propre de $\bar{\mathrm{M}}$ et on note α' la famille telle que $\bar{\mathrm{M}}'$ corresponde à $\mathrm{M}' = \mathrm{M}_{\alpha'}$. On note aussi $\bar{\mathrm{P}}' = \bar{\mathrm{M}}'\bar{\mathrm{U}}'$ le sous-groupe parabolique standard de $\bar{\mathrm{G}}$ de facteur de Levi $\bar{\mathrm{M}}'$. On pose $\mathrm{U}' = \mathrm{U}_{\alpha'}$. On note $\mathfrak{B}'$ l'ordre héréditaire de B inclus dans $\mathfrak{B}$ tel que :
$$\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')\mathrm{J}^1(\beta, \mathfrak{A}) \simeq \bar{\mathrm{M}}'$$
et on choisit un ordre héréditaire E-pur $\mathfrak{A}'$ propre tel que $\mathfrak{A}' \cap \mathrm{B} = \mathfrak{B}'$. On lui associe par transfert une β-extension (J', κ') avec $\mathrm{J}' = \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}')$. On note $\kappa_{\max,\alpha'}$ la représentation du groupe $\mathrm{J}_{\max,\alpha'} = \mathrm{J}' \cap \mathrm{M}'$ sur l'espace des vecteurs $\mathrm{J}' \cap \mathrm{U}'$-invariants de κ'. Soit $(\mathrm{K}', \varkappa')$ la paire associée à (J', κ') comme au paragraphe 2.7.2, avec la propriété que l'induite de $\varkappa'$ à J' est isomorphe à κ'. On obtient :
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^1}(\varkappa, \pi)^{\bar{\mathrm{M}} \cap \bar{\mathrm{U}}'} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}'^1}(\kappa', \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}'^1}(\varkappa', \pi)$$
et :
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_{\max,\alpha}}(\kappa_{\max,\alpha}, \boldsymbol{r}_\alpha(\pi))^{\bar{\mathrm{M}} \cap \bar{\mathrm{U}}'} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}'^1_\alpha}(\kappa'_\alpha, \boldsymbol{r}_\alpha(\pi)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}'^1_\alpha}(\varkappa'_\alpha, \boldsymbol{r}_\alpha(\pi)),$$

(1) Le second auteur remercie Shaun Stevens pour une discussion sur une version préliminaire de la preuve de ce lemme.

où $\mathrm{J}'^1_\alpha = \mathrm{J}'^1 \cap \mathrm{M}$ et où κ'_α est la restriction de κ' à $\mathrm{J}'_\alpha = \mathrm{J}' \cap \mathrm{M}$. De façon analogue, on note $\varkappa'_\alpha$ la restriction de $\varkappa'$ à $\mathrm{K}'_\alpha = \mathrm{K}' \cap \mathrm{M}$ et ε'_α sa restriction à $\mathrm{K}'^1_\alpha = \mathrm{K}'^1 \cap \mathrm{M}$. Par hypothèse de récurrence, la paire $(\mathrm{K}'^1_\alpha, \varepsilon'_\alpha)$ est une paire couvrante de $(\mathrm{J}'^1_{\max,\alpha'}, \eta_{\max,\alpha'})$. On en déduit que l'application :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}'^1_\alpha}(\varkappa'_\alpha, \boldsymbol{r}_\alpha(\pi)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}'^1_{\max,\alpha'}}(\kappa_{\max,\alpha'}, \boldsymbol{r}_{\alpha'}(\pi))$$

est un isomorphisme. En appliquant le foncteur des $\bar{\mathrm{M}} \cap \bar{\mathrm{U}}'$-invariants à (5.19) et en prenant ensuite la composante σ'-isotypique, on obtient une suite exacte :

$$0 \to (\mathcal{V}^{\bar{\mathrm{M}}\cap\bar{\mathrm{U}}'})^{\sigma'} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}'}(\varkappa' \otimes \sigma', \pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_{\max,\alpha'}}(\kappa_{\max,\alpha'} \otimes \sigma', \boldsymbol{r}_{\alpha'}(\pi))$$

de R-espaces vectoriels. Comme $(\mathrm{K}', \varkappa' \otimes \sigma')$ est une paire couvrante de $(\mathrm{J}_{\max,\alpha'}, \kappa_{\max,\alpha'})$ d'après la proposition 2.33, on trouve que $(\mathcal{V}^{\bar{\mathrm{U}}'})^{\sigma'} = 0$, ce qui donne une contradiction. □

Ceci met fin à la preuve de la proposition 5.18. □

Remarque 5.20. — Soit $n \geqslant 1$. On plonge E diagonalement dans $\mathscr{M}_{mn}(\mathrm{D}) \simeq \mathscr{M}_n(\mathrm{A})$. On note $\mathfrak{A}^n_{\max}$ l'ordre E-pur maximal standard de $\mathscr{M}_{mn}(\mathrm{D})$ et $\theta^n_{\max}$ le transfert de $\theta_{\max}$ dans $\mathcal{C}(\mathfrak{A}^n_{\max}, 0, \beta)$. Il y a une unique β-extension $\kappa^n_{\max}$ du caractère simple $\theta^n_{\max}$ qui soit compatible à $\kappa_{\max}$ (voir la condition **A3** du paragraphe 5.3). Il correspond à cette β-extension un foncteur :

$$\mathbf{K}_n : \mathscr{R}(\mathrm{G}_{mn}) \to \mathscr{R}(\mathrm{GL}_{m'n}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})). \tag{5.20}$$

Soient $n_1, \dots, n_r \geqslant 1$ des entiers tels que $n_1 + \dots + n_r = n$ et, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit π_i une représentation irréductible de G_{mn_i}. Alors on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{K}_n(\pi_1 \times \dots \times \pi_r) \simeq \mathbf{K}_{n_1}(\pi_1) \times \dots \times \mathbf{K}_{n_r}(\pi_r). \tag{5.21}$$

On pose $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$ et on a un foncteur :

$$\mathbf{K}_\alpha : \mathscr{R}(\mathrm{M}_{(mn_1,\dots,mn_r)}) \to \mathscr{R}(\mathrm{GL}_{m'n_1}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}) \times \dots \times \mathrm{GL}_{m'n_r}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})) \tag{5.22}$$

correspondant à la représentation $\kappa^{n_1}_{\max} \otimes \dots \otimes \kappa^{n_r}_{\max}$ du groupe $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}^{n_1}_{\max}) \times \dots \times \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}^{n_r}_{\max})$. On note $\bar{\mathrm{U}}_{(m'n_1,\dots,m'n_r)}$ le sous-groupe unipotent standard de $\mathrm{GL}_{m'n}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$ associé à $(m'n_1, \dots, m'n_r)$. Si π est une représentation de G_{mn}, on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{K}_n(\pi)^{\bar{\mathrm{U}}_{(m'n_1,\dots,m'n_r)}} \simeq \mathbf{K}_\alpha(\boldsymbol{r}_{(mn_1,\dots,mn_r)}(\pi)). \tag{5.23}$$

Références

[1] C. Blondel – “Quelques propriétés des paires couvrantes”, *Math. Ann.* **331** (2005), no. 2, p. 243–257.

[2] P. Broussous – “Extension du formalisme de Bushnell et Kutzko au cas d'une algèbre à division”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), no. 2, p. 292–326.

[3] ———, “Minimal strata for $\mathrm{GL}(m, D)$”, *J. Reine Angew. Math.* **514** (1999), p. 199–236.

[4] P. Broussous, V. Sécherre & S. Stevens – “Smooth representations of $\mathrm{GL}(m, D)$, V: endo-classes”, *Documenta Math.* **17** (2012), p. 23–77.

[5] C. J. Bushnell & A. Fröhlich – *Gauss sums and p-adic division algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 987, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[6] C. J. Bushnell & G. Henniart – “Local tame lifting for $\mathrm{GL}(N)$. I: Simple characters”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1996), no. 83, p. 105–233.

[7] ———, “Local tame lifting for $\mathrm{GL}(n)$ IV: Simple characters and base change”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **87** (2003), no. 2, p. 337–362.

[8] C. J. Bushnell & P. C. Kutzko – *The admissible dual of* GL(N) *via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[9] ______, "Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types", *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), no. 3, p. 582–634.

[10] ______, "Semisimple types in GL_n", *Compositio Math.* **119** (1999), no. 1, p.

[11] ______, "Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques", *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 2, p. 261–333. 53–97.

[12] J.-F. Dat – "Types et inductions pour les représentations modulaires des groupes p-adiques", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 1, p. 1–38. With an appendix by Marie-France Vignéras.

[13] ______, "Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques", *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 2, p. 261–333.

[14] R. Dipper – "On quotients of Hom-functors and representations of finite general linear groups. I", *J. Algebra* **130** (1990), no. 1, p. 235–259.

[15] R. Dipper & P. Fleischmann – "Modular Harish-Chandra theory. I", *Math. Z.* **211** (1992), no. 1, p. 49–71.

[16] ______, "Modular Harish-Chandra theory. II", *Arch. Math. (Basel)* **62** (1994), no. 1, p. 26–32.

[17] M. Grabitz, A. J. Silberger & E.-W. Zink – "Level zero types and Hecke algebras for local central simple algebras", *J. Number Theory* **91** (2001), no. 1, p. 92–125.

[18] J. A. Green – "The characters of the finite general linear groups", *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955), p. 402–447.

[19] R. Howe & A. Moy – "Minimal K-types for GL_n over a p-adic field", *Astérisque* (1989), no. 171-172, p. 257–273.

[20] ______, "The irreducible representations of the finite general linear groups", *Proc. London Math. Soc. (3)* **52** (1986), no. 2, p. 236–268.

[21] A. Mínguez & V. Sécherre – "Représentations lisses modulo ℓ de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$", prépublication.

[22] ______, "Représentations banales de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$", prépublication.

[23] P. Schneider & E.-W. Zink – "K-types for the tempered components of a p-adic general linear group", *J. Reine Angew. Math.* **517** (1999), p. 161–208. With an appendix by P. Schneider and U. Stuhler.

[24] V. Sécherre – "Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$, I : caractères simples", *Bull. Soc. math. France* **132** (2004), no. 3, p. 327–396.

[25] ______, "Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$, II : β-extensions", *Compositio Math.* **141** (2005), p. 1531–1550.

[26] ______, "Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$, III : types simples", *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **38** (2005), p. 951–977.

[27] ______, "Proof of the Tadić conjecture (U0) on the unitary dual of $\mathrm{GL}_m(D)$", *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009), p. 187–203.

[28] V. Sécherre & S. Stevens – "Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$, IV : représentations supercuspidales", *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), no. 3, p. 527–574.

[29] ______, "Smooth representations of $\mathrm{GL}(m, D)$, VI: semisimple types", *Int. Math. Res. Not.* (2011).

[30] J.-P. Serre – *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.

[31] M.-F. Vignéras – *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[32] ______, "Induced R-representations of p-adic reductive groups", *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 4, p. 549–623. With an appendix by Alberto Arabia.

[33] ———, "Irreducible modular representations of a reductive p-adic group and simple modules for Hecke algebras", in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 117–133.

[34] ———, "Modular representations of p-adic groups and of affine Hecke algebras", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, p. 667–677.

[35] ———, "On highest Whittaker models and integral structures, in *Contributions to Automorphic forms, Geometry and Number theory: Shalikafest 2002*, John Hopkins Univ. Press, 2004, p. 773–801.

Alberto Mínguez, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75005, Paris, France. URL: http://www.math.jussieu.fr/~minguez/ • *E-mail :* `minguez@math.jussieu.fr`

Vincent Sécherre, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France
E-mail : `vincent.secherre@math.uvsq.fr`