UNIVERSITÉ PARIS SUD
U.F.R de Mathématiques

Thèse de Doctorat

Spécialité Mathématiques

présentée par

ALBERTO MÍNGUEZ ESPALLARGAS

Correspondance de Howe l-modulaire : paires duales de type II

Directeur :	Guy	HENNIART	Université Paris Sud
Rapporteurs :	Colette	MOEGLIN	Université Paris VII,
	Goran	MUIC	University of Zagreb

Soutenue publiquement le 8 décembre 2006 devant le jury composé de :

Pr. Laurent	CLOZEL	Université Paris Sud
Pr. Colette	MOEGLIN	Université Paris VII
Pr. Michael	HARRIS	Université Paris VII
Pr. Guy	HENNIART	Université Paris-Sud
Pr. Pierre	TORASSO	Université de Poitiers

Remerciements

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse Guy Henniart. Je n'ai pas des mots en français pour exprimer mon admiration pour lui. Je peux par contre la résumer en un mot espagnol : *cojonudo*. Tout au long de ma thèse, j'ai été impressionné par ses qualités aussi bien scientifiques que humaines ; c'est grâce à lui que j'ai découvert des mathématiques magnifiques, mais surtout une approche, et je dirais même un art de la recherche que je garderai comme modèle.

Je tiens aussi à remercier Colette Moeglin et Goran Muic qui ont accepté d'être rapporteurs de mon travail et qui ont pris sur leur temps pour commenter et critiquer ce texte.

Je remercie également Laurent Clozel, Michael Harris et Pierre Torasso de me faire l'honneur de participer à mon jury.

Aucun travail ne peut se faire sans l'échange, le soutien et la stimulation apportés par d'autres chercheurs. En premier lieu Colette Moeglin, qui m'a prodigué nombre de conseils et idées durant ces années, mais aussi Michael Harris et Laurent Clozel que je remercie pour les suggestions intéressantes qu'ils m'ont faites. Bien sûr, je n'oublie pas le rôle que Roger Howe et Jean-Loup Waldspurger ont joué dans l'écriture de l'annexe. Et encore Vincent Sécherre, Jean-François Dat, Marie-France Vignéras et Gérard Freixas.

Mon éveil aux mathématiques n'est évidemment pas étranger à mes enseignants de naguère. Certains, par leurs conseils et leur amitié, ont joué un rôle particulier dans mon parcours. Je pense, bien sur, à Jose Luis Vicente et Luis Narváez... et à mon premier professeur de mathématiques, *el abuelo Julio*.

J'ai appris en écrivant cette thèse que certaines choses paraissent évidentes mais sont difficiles à exprimer. J'ai toujours eu du mal à dire à mes parents deux mots qui me paraissent évidents : *os quiero*.

J'envoie une pensée à toute ma famille et à mes amis d'Espagne (Gonzalo, Sergio, Jorge, Mercedes...) qui, malgré mon arrivée en France il y a sept ans, m'ont toujours fait sentir avec chaleur qu'ils étaient à mes côtés. Dans mes souvenirs, cette thèse restera imprégné de Sara, Gersende, Emilie, mes colocs André et Ben, Oscar, Jesús, David... *ces gens-là* qui forment ma chère famille à Paris.

A Guille, mi hermano.

Table des matières

Introduction **9**

1 Premier exemple : Thèse de Tate **21**
1.1 Le problème 21
1.2 Les fonctions zêta 23
1.3 Calcul des facteurs gamma et epsilon 29
1.4 Réduction modulo l 31

2 Représentations de GL_n **35**
2.1 Théorie générale 35
2.2 Représentations complexes de GL_n 49
2.3 Représentations en caractéristique banale 53
2.4 Quelques remarques 66

3 Irréductibilité d'une induite parabolique **69**
3.1 Unicité 70
3.2 Calcul explicite 73
3.3 Un peu de combinatoire : un lemme technique 85

4 Correspondance de Howe explicite **87**
4.1 Introduction 87
4.2 Première filtration 90
4.3 Deuxième filtration 95
4.4 Application 104
4.5 Exemple : correspondance $GL(1), GL(m)$ 109
4.6 La démonstration 110
4.7 Correspondance $GL(n), GL(n)$: fin de la preuve 118
4.8 Quelques remarques 119

5 Fonctions zêta **121**
5.1 Réduction du problème 121

5.2 Algèbres à division 126
5.3 Cas cuspidal 128
5.4 Induction dans le cas banal 129
5.5 Réduction modulo l 137
5.6 Classification des fonctions L dans le cas banal 141
5.7 Lien avec la correspondance de Howe 145

A Une autre preuve de la correspondance 149
A.1 Quelques rappels 150
A.2 La representation métaplectique σ 152
A.3 Démonstration du théorème de Howe 168

Introduction

Le travail réalisé dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie des représentations des groupes p-adiques. Nous proposons une nouvelle méthode pour démontrer la bijectivité de la correspondance de Howe pour les paires duales de type II. Cette preuve s'étend à des représentations l-modulaires lorsque l est un entier dit *banal*. Elle nous permet d'expliciter la bijection en termes des paramètres de Langlands, pour les représentations complexes comme dans le cas banal.

Le cadre de la thèse est le suivant. Dans toute cette thèse la lettre F désigne un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, D une algèbre à division de centre F de dimension finie d^2 sur F, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, $\mathcal{P}$ son idéal maximal, $k_D = \mathcal{O}/\mathcal{P}$ son corps résiduel et q le cardinal de k_D. La lettre R désignera un corps algébriquement clos de caractéristique l différente de p : nous allons considérer des R-représentations, *i.e.* des représentations sur des R-espaces vectoriels. Fixons aussi ψ, un caractère non trivial de F à valeurs dans $R^\times$.

Lorsque $R = \mathbb{C}$, les notions de base de la correspondance de Howe sont développées dans [MVW]. Si W est un espace symplectique sur F, on dispose du groupe métaplectique $\widetilde{Sp}(W)$, extension du groupe symplectique $Sp(W)$ par $\mathbb{C}^\times$ et d'une représentation canoniquement attachée à ψ, dite de Weil ou métaplectique, de dimension infinie de $\widetilde{Sp}(W)$. Soit (U_1, U_2) une paire duale réductive dans $Sp(W)$: ou bien (U_1, U_2) est une paire de groupes classiques -symplectique, orthogonal, unitaire- (paires duales de type I) ou bien une paire de groupes linéaires (paires duales de type II). Notons $\widetilde{U_i}$, $i = 1, 2$ l'image réciproque de U_i dans $\widetilde{Sp}(W)$. La représentation de Weil de $\widetilde{Sp}(W)$ donne alors une représentation de $\widetilde{U_1} \times \widetilde{U_2}$, dont les quotients irréductibles sont de la forme $\pi_1 \otimes \pi_2$ où π_i est une représentation lisse irréductible de $\widetilde{U_i}$, $i = 1, 2$; on conjecture -et on sait, par [MVW] et [Wal], si la paire duale est de type I et p est impair- que la correspondance $\pi_1 \leftrightarrow \pi_2$ est une bijection entre un certain ensemble ξ_1 de représentations lisses irréductibles de $\widetilde{U_1}$ et un ensemble ξ_2 de représentations lisses irréductibles de $\widetilde{U_2}$. Il est du plus haut intérêt de connaître mieux -si possible explicitement- ξ_1 et ξ_2 et la bijection de ξ_1 vers ξ_2.

Quand la paire duale est de type I, plusieurs résultats dans cette direction ont déjà été obtenus. D'un côté, G. Muic (*cf.*[Mu1], [Mu2]), lorsque la paire duale de sous-groupes est $(O(V), Sp(2n))$, suite à des travaux de C. Moeglin et M. Tadic sur la classification des séries discrètes, a réussi à paramétrer cette bijection en se restreignant au sous-ensemble de ξ_1 des représentations tempérées. D'un autre côté, avec des techniques très différentes, S.-H. Pan (*cf.*[Pan]), a des résultats partiels pour la paire duale $(U(n), U(m))$ si les entiers n et m sont assez petits.

Lorsque la paire duale est de type II, la situation est beaucoup moins complexe. D'abord, on a une réalisation très simple de la restriction de la représentation métaplectique à la paire duale. Pour n et m des entiers strictement positifs, notons $\mathcal{M}_{m,n}$ (resp. $\mathcal{M}_n$) l'ensemble de matrices $n \times m$ (resp. $n \times n$) à coefficients dans D. Le groupe $GL_n(D)$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n$ sera noté G_n et $S_{n,m} = S(\mathcal{M}_{m,n})$ sera l'ensemble des fonctions $\Phi : \mathcal{M}_{m,n} \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact.

Posons $\sigma_{n,m} : G_n \times G_m \to GL(S_{n,m})$ la représentation naturelle de $G_n \times G_m$ définie par

$$\sigma_{n,m}(g, g')\Phi(x) = \Phi\left(g^{-1}xg'\right),$$

pour $g \in G_n,\ g' \in G_m,\ x \in \mathcal{M}_{m,n},\ \Phi \in S_{n,m}$.

A un caractère près, c'est la représentation métaplectique restreinte à la paire duale $G_n \times G_m$. Toute paire duale de type II est de la forme précédente.

Supposons $n \leq m$ et soit π une représentation irréductible de G_n. La conjecture de Howe, dans ce cas, prédit qu'il existe une unique représentation irréductible de G_m notée $\theta_{n,m}(\pi)$, telle que $\pi \otimes \theta_{n,m}(\pi)$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$, et qu'alors

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \theta_{n,m}(\pi))\right) = 1.$$

Bien qu'admise, aucune preuve de cette conjecture n'a jamais été publiée. Outre l'intérêt de calculer explicitement la correspondance, l'idée initiale était de comprendre comment se généralise cette théorie à des R-représentations. Pour les paires duales de type II, c'est très simple d'étendre les définitions précédentes à des R-représentations, il suffit juste de considérer $S_{n,m} = S_R(\mathcal{M}_{m,n})$ comme l'ensemble des fonctions de $\mathcal{M}_{m,n}$ *à valeurs dans* R localement constantes à support compact.

Cette thèse est composée de trois parties d'intérêts indépendants, à savoir

1. La théorie des R-représentations de $GL_n(D)$ (chapitres 2 et 3).
2. Fonctions zêta l-modulaires (chapitres 1 et 5).
3. La correspondance de Howe (chapitre 4 et annexe).

Remarquons que bien qu'elle soit consacrée à plusieurs sujets, a priori relativement indépendants, cette thèse présente néanmoins une unité. En effet, comme on le verra, la théorie des fonctions zêta l-modulaires, nous fournit des entrelacements explicites entre π et $\theta_{n,m}(\pi)$ et leur équation fonctionnelle peut être, à son tour, démontrée par la correspondance de Howe quand $n = m$. Ensuite, la théorie des R-représentations de $GL_n(D)$, nous fournit, d'abord, les arguments pour une nouvelle preuve de l'unicité de la correspondance, puis les paramétrisations nécessaires pour pouvoir l'expliciter.

Avant de passer à une description plus détaillée de chacune de ces trois parties, indiquons d'abord, en bref, les résultats les plus importants obtenus dans cette thèse :

a. Nous étendons tous les résultats de [Ze1] sur la paramétrisation, en termes de segments, de représentations irréductibles au cadre des R-représentations de $GL_n(F)$ quand la caractéristique de R est banale (voir ci-dessous pour les définitions) et aussi aux représentations complexes de $GL_n(D)$.

b. Nous donnons des conditions suffisantes pour que l'induite parabolique de deux représentations irréductibles, notées ρ et π, n'ait qu'un seul sous-module irréductible. Quand la représentation ρ est cuspidale, on calcule, en termes de la classification précédente, les paramètres de ce sous-module en fonction de ceux de π, ce qui nous donne, en particulier, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle induite soit irréductible.

c. On étend la théorie des fonctions zêta de Godement-Jacquet à des R-représentations quand R est de caractéristique banale et dans beaucoup d'autres cas (voir ci-dessous).

d. La correspondance de Howe **n'est pas** bijective quand R est de caractéristique non banale. Quand R est de caractéristique banale, on montre, de deux façons différentes, la conjecture de Howe pour les paires duales de type II. L'une des preuves, qui utilise des méthodes proches de celles de [Ku1] [Mu1], [Mu2], nous fournit, en outre, les paramètres de $\theta_{n,m}(\pi)$ en termes de ceux de π. L'autre démonstration, indépendante et écrite dans une annexe à la thèse, est basée sur des idées non publiées de R. Howe et contient plus de renseignements sur la correspondance quand R est de caractéristique non banale.

Passons à une présentation plus détaillée de la thèse :

R-Représentations de GL_n

La théorie des R-représentations des groupes réductifs p-adiques est développée dans [Vi1] quand la caractéristique de R est un nombre premier $l \neq p$. Lorsque le groupe en question est $GL(n, F)$, l'article [Vi2] établit une paramétrisation des R-représentations irréductibles en termes des représentations supercuspidales. Dans cette thèse nous nous contentons de travailler en caractéristique banale, c'est-à-dire, nous supposons que le pro-ordre du sous-groupe compact maximal de G_n est inversible dans R, ceci nous permettant d'établir une classification avec plus de *bonnes* propriétés que celle de [Vi2].

Introduisons quelques autres notations : on note $\mathcal{R}$ l'algèbre graduée $\mathcal{R} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{R}_n$ où $\mathcal{R}_n$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des R-représentations de longueur finie de G_n (par convention $G_0 = \{1\}$). La multiplication sur $\mathcal{R}$ est définie par

$$m(\rho_1 \otimes \rho_2) = \mathrm{s.\,s.}\,(\rho_1 \times \rho_2)\,,$$

où on note $\rho_1 \times \rho_2$ l'induite normalisée de $\rho_1 \otimes \rho_2$ et $\mathrm{s.\,s.}\,(\rho_1 \times \rho_2)$ est l'image de $\rho_1 \times \rho_2$ dans $\mathcal{R}$.

On notera aussi $\mathrm{Irr}(G_n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G_n. Avant de passer à nos résultats les plus importants sur la classification des R-représentations de $GL_n(D)$, signalons une première petite contribution, qui est à la base de toute la construction qui suit. Étant données deux représentations irréductibles π_1, π_2 en caractéristique banale on montre que $\mathrm{s.\,s.}\,(\pi_1 \times \pi_2) \simeq \mathrm{s.\,s.}\,(\pi_2 \times \pi_1)$. Sa démonstration (*cf.* 2.1.8) est basée sur des idées de Bernstein (*cf.* [BDK] pour la preuve quand $R = \mathbb{C}$) et des récents résultats de J.F. Dat [Dat]. L'un des charmes de cette preuve est l'utilisation d'un principe de densité : on montre que le théorème est vrai pour un ensemble dense et que la propriété à prouver est *régulière*, d'où le théorème pour toute l'algèbre $\mathcal{R}$.

Plaçons-nous maintenant sous l'hypothèse (H) suivante :

1. Ou bien $D = F$ et R est de caractéristique banale ;
2. ou bien R est de caractéristique 0.

Il nous a semblé intéressant de profiter de l'occasion de cette thèse, afin d'illustrer la nature purement combinatoire des idées mises en jeu, de démontrer, par une méthode inspirée de [Ze1] et [Tad], la paramétrisation en termes de *segments* comme dans [Ze1], des R-représentations irréductibles de $GL_n(D)$ lorsque R, D et n satisfont à l'hypothèse (H). Cette hypothèse n'est pas forcément nécessaire : probablement, une telle paramétrisation existe juste en supposant R de caractéristique banale mais il nous faudrait d'avantage d'arguments.

Nous allons ci-dessous introduire et décrire plus en détail la nature de ces résultats.

Sous l'hypothèse (H), on peut montrer qu'il existe une fonction qui, à chaque représentation cuspidale $\rho \in \mathrm{Irr}(G_p)$ associe un caractère de G_p, noté ν_ρ, tel que, si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations cuspidales de $GL_i(D)$ et $GL_j(D)$, alors $\rho_1 \times \rho_2$ est réductible si, et seulement si

$$\rho_1 = \nu_{\rho_1}\rho_2 \text{ ou } \rho_1 = \nu_{\rho_1}^{-1}\rho_2.$$

Le caractère ν_ρ est de la forme ν^{s_ρ} où s_ρ est un entier positif et $\nu : G_p \to R$ est déinifi par $\nu(g) = |\mathrm{Nrd}_{\mathcal{M}_n}(g)|_F$, où $|\ |_F$ est la valeur absolue normalisée sur F et $\mathrm{Nrd} : \mathcal{M}_n \to F$ la norme réduite.

Soient ρ une représentation cuspidale et $r \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\Delta = \left\{\rho, \nu_\rho\rho, \ldots, \nu_\rho^{r-1}\rho\right\}.$$

On appelle Δ un segment. On dit que les segments $\Delta = \left\{\rho, \nu_\rho\rho, \ldots, \nu_\rho^{r-1}\rho\right\}$, $\Delta' = \left\{\rho', \nu_{\rho'}\rho', \ldots, \nu_{\rho'}^{n'-1}\rho'\right\}$ sont liés si $\Delta \cup \Delta'$ est encore un segment et $\Delta \nsubseteq \Delta'$ et $\Delta' \nsubseteq \Delta$. On dit que Δ précède Δ' s'ils sont liés et il existe $\tau \in \Delta$ telle que $\rho' = \tau\nu_\rho$.

A chaque segment $\Delta = \left\{\rho, \nu_\rho\rho, \ldots, \nu_\rho^{n-1}\rho\right\}$, ρ étant une représentation cuspidale de G_p, on peut associer (*cf.* proposition 2.3.3) des représentations irréductibles $\langle\Delta\rangle$ et $\langle\Delta\rangle^t$ telles que

1. $\langle\Delta\rangle$ (resp. $\langle\Delta\rangle^t$) est l'unique sous-module (resp. quotient) irréductible de $\rho \times \nu_\rho\rho \times \cdots \times \nu_\rho^{n-1}\rho$.
2. $r_{(p,\ldots,p),np}(\langle\Delta\rangle) = \rho \otimes \nu_\rho\rho \otimes \cdots \otimes \nu_\rho^{n-1}\rho$ (resp. $r_{(p,\ldots,p),np}\left(\langle\Delta\rangle^t\right) = \nu_\rho^{n-1}\rho \otimes \cdots \otimes \nu_\rho\rho \otimes \rho$).

Le théorème suivant est le résultat principal qui nous permet de classifier les représentations irréductibles dans notre cadre.

Théorème 1. (voir théorème 2.3.6).

1. *Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ des segments. Supposons que, si $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j. Alors la représentation $\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t$) admet une unique sous-représentation (resp. quotient) irréductible. On la note $\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle$ (resp.$\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle^t$). La multiplicité de $\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle^t$) dans $\langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta_2\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t$) est égale à 1.*

2. *Les représentations* $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle$ *et* $\langle \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'} \rangle$ *(resp.* $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle^t$ *et* $\langle \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'} \rangle^t$*) sont équivalentes si, et seulement si, les suites* $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ *et* $(\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'})$ *sont égales à l'ordre près.*
3. *Toute représentation irréductible de* G_n *est de la forme* $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle$ *(resp.*$\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle^t$*).*

Ce théorème nous permet d'étendre tous les résultats de [Ze1] aux représentations vérifiant l'hypothèse (H).

En particulier, la flèche $\langle \Delta \rangle \mapsto \langle \Delta \rangle^t$ s'étend, de façon unique, en un endomorphisme involutif, appelé l'involution de Zelevinskii, $\pi \mapsto \tau(\pi)$ de l'algèbre $\mathcal{R}$. Nous prouvons aussi la

Proposition 2. (voir théorème 3.2.12). *L'involution de Zelevinskii vérifie la description géométrique de [Ze2].*

Ce résultat était déjà montré lorsque $D = F$ et $R = \mathbb{C}$ dans [MW].

Quand $D = F$ et R est de caractéristique banale, la plupart de ces résultats sont des conséquences directes de [Vi1] et [Vi2] et [Vi4].

Lorsque D est de caractéristique 0 et $R = \mathbb{C}$, le théorème 1 est une conséquence assez directe des résultats de [Tad] comme nous le montrons dans la section 2.2. La proposition 2 était conjecturée dans [Tad, Conjecture 3.6].

Si D est de caractéristique positive et $R = \mathbb{C}$, ces résultats sont énoncés dans [Ba2], mais sans démonstration.

Revenons à notre contribution et indiquons maintenant la proposition suivante qui est la clé de plusieurs résultats intéressants par la suite.

Théorème 3. (voir théorème 3.1.1). *Soient* $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ *des segments non liés vérifiant la condition suivante*

$$\textit{Si } i \neq j, \textit{ alors ou bien } \Delta_i = \Delta_j \textit{ ou bien } \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset. \qquad \text{(a)}$$

Soit $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle^t$ *(resp.* $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle$*) et* $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$. *Alors* $\pi \times \rho$ *a un unique sous-module irréductible.*

Cette proposition répond à la conjecture [MVW, Conjecture 3.III.6] et ouvre une nouvelle approche à la compréhension de la conjecture (U0) de [Tad] [1]. Ce théorème n'est pas entièrement satisfaisant en ce sens qu'il ne donne que des conditions suffisantes (et non aussi nécessaires) pour que l'induite de deux représentations irréductibles n'ait qu'un seul sous-module irréductible mais il est naturel de se poser la question de savoir si la condition

[1] Elle a été récemment prouvée par V. Sécherre

(a) est bien nécessaire. Si l'induite de deux représentations irréductibles n'a qu'un seul sous-module irréductible, alors la conjecture (U0) de [Tad] est vraie.

Ensuite, nous reprenons les idées de [MW] et décrivons (cf. théorème 3.2.7) les paramètres, en termes des classifications précédentes, de cet unique sous-module irréductible lorsque ρ est une représentation cuspidale. Ce calcul, de nature très technique sous de nombreux aspects, est fondamental pour pouvoir expliciter ensuite la correspondance de Howe. Pour plus de détails, notamment pour un énoncé précis de ce résultat, le lecteur pourra se reporter au chapitre 3 où toutes les notations seront rappelées.

Fonctions zêta l-modulaires

Notre second apport concerne la généralisation, au contexte des R-représentations, des fonctions zêta de Godement-Jacquet.

Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$. Pour tout coefficient $f : G_n \to R$, toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M}_n)$ et tout $N \in \mathbb{Z}$, l'intégrale

$$\int_{G,\nu(x)=q^{-N}} \Phi(x) f(x) \, d\mu^{\times}(x)$$

est bien définie. En effet $\left\{x \in G_n : \nu(x) = q^{-N}\right\} \cap \mathrm{supp}(\Phi)$ est une partie compacte de G_n et Φ et f sont localement constants sur cette partie.

On peut alors définir la somme formelle (la *fonction zêta*) :

$$Z(\Phi, T, f) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \left(\int_{G,\nu(x)=q^{-N}} \Phi(x) f(x) \, d\mu^{\times}(x) \right) T^N.$$

L'avantage principal à considérer les fonctions zêta en tant que des séries formelles vient de ce que les difficultés à montrer le prolongement analytique et les problèmes de convergence sont, en partie, mis de côté.

Le théorème principal que l'on montre est le suivant :

Théorème 4. (voir théorème 5.1.5). *Supposons R de caractéristique l banale ou bien de caractéristique $l \neq p$ quelconque mais $D = F$. Soit π une représentation irréductible. On a :*

1. *$Z(\Phi, T, f) \in R(T)$. Il existe $P_0(\pi, T) \in R[T]$ tel que pour tout coefficient $f : G_n \to R$, toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M}_n)$ on ait*

$$Z(\Phi, T, f) P_0(\pi, T) \in R\left[T, T^{-1}\right].$$

2. *Notons $\mathcal{Z}(\pi)$ le sous-R-espace vectoriel de $R(T)$ engendré par les fonctions $Z\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right)$ avec f coefficient de π et $\Phi \in S_R(\mathcal{M}_n)$. Alors : $\mathcal{Z}(\pi)$ est un idéal fractionnaire de $R[T, T^{-1}]$ contenant les constantes. Il admet un générateur de la forme $L(T,\pi) = 1/P_0(T)$ avec $P_0 \in R[T]$ et $P_0(0) = 1$.*
3. *Il existe $\gamma(T,\pi,\psi) \in R(T)$ tel que*
$$Z\left(\widehat{\Phi}, q^{-\frac{1}{2}(n+1)}T^{-1}, \check{f}\right) = \gamma(T,\pi,\psi)\, Z\left(\Phi, q^{-\frac{1}{2}(n-1)}T, f\right),$$
où $\widehat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de Φ par rapport à une mesure autoduale, ψ est le caractère non trivial de F fixé auparavant, et on note $\check{f}$ le coefficient de $\widetilde{\pi}$ défini par $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Pour la preuve, on suit, en grandes lignes, les articles [Ja1] et [Ja2] mais leur démarche n'est pas généralisable quand la caractéristique de R n'est pas banale et il faut utiliser de nouveaux arguments (ici on va utiliser la réduction modulo l). Il serait intéressant d'avoir une version du théorème sans contraintes sur la caractéristique $l \neq p$.

On prouve aussi le théorème pour R de caractéristique $l \neq p$ quelconque si la représentation π est cuspidale. Dans ce cas, le fait que les coefficients soient à support compact modulo le centre, nous permet, en quelque sorte, de nous ramener au cas où $n = 1$. Ainsi, on trouve (*cf.* théorème 5.2.3) que le théorème précédent est vrai avec $L(T,\pi) = 1$.

Quand on est sous l'hypothèse (H), notre classification ci-dessus nous fournit le cadre pour pouvoir calculer les fonctions $L(T,\pi)$ en termes des paramètres de π. On trouve

Théorème 5. (voir théorème 5.6.1). *Soit $\pi = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle^t$ une représentation irréductible de G_n. Si l'on note pour tout i, $1 \leq i \leq r$, $\Delta_i = \left\{\rho_i^{(1)}, \ldots, \rho_i^{(n_i)}\right\}$ alors*
$$L(T,\pi) = \prod_{1 \leq i \leq r} L\left(T, \rho_i^{(n_i)}\right).$$

Ce théorème généralise le théorème [Ja2, 3.4.] à des représentations vérifiant l'hypothèse (H).

La correspondance de Howe

Soient $n \leq m$ deux entiers et $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$. Dans cette thèse on propose deux preuves différentes du

Théorème 6. (voir théorèmes 4.1.2 et A.3.1). *Supposons R de caractéristique l banale. Il existe alors une unique représentation $\pi' \in \mathrm{Irr}(G_m)$ telle que*

$$\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi') \neq 0.$$

De plus, $\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi')\right) = 1$.

Avant d'expliquer la preuve, indiquons, en bref, les quelques résultats que l'on obtient lorsque R est de caractéristique non banale :

1. Le théorème 6 est vrai si $n = m$ et π est une représentation cuspidale différente de la représentation triviale (voir 4.2.4).
2. Le théorème 6 est vrai si π et π' ont des vecteurs fixes par des sous-groupes ouverts compacts K et K' respectivement de pro-ordre inversible dans R et n'ont pas de vecteurs fixes par des sous-groupes ouverts compacts $K_1 \supsetneq K$ et $K'_1 \supsetneq K'$ respectivement (voir A.3.4).
3. On trouve des exemples (voir 4.5), pour lesquels, étant donné π irréductible, on a plusieurs représentations irréductibles différentes π' avec $\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi') \neq 0$ et même
$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi')\right) > 1.$$

Expliquons maintenant les principes des méthodes employées pour la preuve du théorème 6 :

La première idée est la suivante : les fonctions zêta nous fournissent un entrelacement entre π et un sous-quotient irréductible de l'induite $\nu^{\frac{-n}{2}} \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\pi}$. Il faudra après montrer que cet entrelacement est unique. C'est ici que l'hypothèse de banalité sera importante.

La preuve de l'unicité est faite de deux façons indépendantes :

Première preuve

La première méthode est inspirée des travaux [Ku1], [Mu1] et [Mu2] pour les paires duales de type I, et on arrive ici à décrire toute la correspondance grâce aux deux idées suivantes fondamentales pour nous :

1. On sait que la correspondance se réalise quand $n = m$, grâce aux fonctions zêta.
2. Les résultats sur l'unicité du sous-module d'une induite parabolique et son calcul explicite.

Plaçons nous sous l'hypothèse (H). Alors on dispose d'une paramétrisation des représentations irréductibles de G_n et G_m ce qui nous permet d'expliciter, de plus, la correspondance. On trouve :

Théorème 7. (voir théorèmes 4.1.2). *Supposons*

$$\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi') \neq 0.$$

Alors,

$$\pi' = \left\langle \nu^{-\frac{n}{2}-\frac{m-n-1}{2}}, \ldots, \nu^{-\frac{n}{2}+\frac{m-n-1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t$$

si $\pi = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t$.

Ce théorème est nouveau même quand $R = \mathbb{C}$. Donnons maintenant les grandes lignes de la preuve :

L'étude, comme dans [MVW, 3.III.], d'une suite de composition de la représentation métaplectique n'est pas complètement satisfaisante en ce sens qu'elle ne nous permet de montrer le théorème 6 que pour un certain nombre de représentations et non pour toutes. Pour avoir des renseignements plus précis, nous calculons, en suivant [Ku1], une suite de composition *des foncteurs de Jacquet* de la représentation métaplectique. Ceci nous permettra de montrer les théorèmes 6 et 7 par récurrence.

Soient alors $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ et $\pi' \in \mathrm{Irr}(G_m)$ telles que $\pi \otimes \pi'$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$. Soit χ une représentation cuspidale de G_p telle qu'il existe $\rho \in \mathrm{Irr}(G_{n-p})$ avec π sous-module de l'induite (normalisée) $\chi \times \rho$. Alors, par l'exactitude du foncteur de Jacquet, $\chi \otimes \rho \otimes \pi'$ est un quotient du foncteur de Jacquet de $\sigma_{n,m}$.

L'idée, *grosso modo*[2], est d'utiliser maintenant la suite de composition calculée précédemment : si χ est distinct de deux caractères bien particuliers, alors cette suite se réduit à un seul élément et on peut en déduire qu'il existe $\rho' \in \mathrm{Irr}(G_{m-p})$ avec π' sous-module de l'induite (normalisée) $\rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$ et $\rho \otimes \rho'$ est quotient de $\sigma_{n-p,m-p}$ (avec une bonne normalisation).

Par récurrence, on a les théorèmes 6 et 7 pour ρ et ρ'. De plus, grâce aux résultats des chapitres précédents, on sait que les induites $\chi \times \rho$ et $\rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$ n'ont qu'un seul sous-module irréductible et on *sait calculer* les paramètres de ce sous-module ce qui nous permettra de démontrer ces théorèmes sauf quand les foncteurs de Jacquet font intervenir ces deux caractères particuliers uniquement.

Dans ces cas on se sert de deux arguments :

1. Des propriétés particulières de la paramétrisation des représentations irréductibles.
2. Le fait que l'unicité est montrée dans certains cas, grâce à la première filtration.

[2]Il y a des complications techniques que l'on évite dans cette introduction et qui seront expliquées dans la preuve du théorème.

Deuxième preuve

La deuxième preuve est basée sur un papier non publié de R. Howe. L'idée de la démonstration est la même que celle qui apparaît dans [MVW, §5] et dans [Wal], adaptée aux paires duales de type II.

Il s'agit, en bref, de trouver un foncteur $\mathbf{f}_{K,K'}$ exact de la catégorie de $G_n \times G_m$-modules vers la catégorie des $\mathcal{H}(G_n, K) \times \mathcal{H}(G_m, K')$-modules, où $\mathcal{H}(G_n, K)$ et $\mathcal{H}(G_m, K')$ sont les algèbres de Hecke relatives à deux sous-groupes compacts K et K' respectivement, tel que $\mathbf{f}_{K,K'}(\sigma_{n,m})$ soit un $\mathcal{H}(G_n, K)$-module cyclique et aussi $\mathcal{H}(G_m, K')$-cyclique de même générateur.

Si $V \otimes V'$ est un quotient de $\sigma_{n,m}$ on déduit de l'exactitude de $\mathbf{f}_{K,K'}$ que, $\mathbf{f}_{K,K'}(V \otimes V')$ est aussi $\mathcal{H}(G_n, K)$ et $\mathcal{H}(G_m, K')$-cyclique de même générateur, ce qui nous permet, comme dans [MVW, §5], de conclure que V' est unique si V est fixé.

Pour montrer l'exactitude du foncteur $\mathbf{f}_{K,K'}$, il faut supposer que le pro-ordre de K et K' est inversible dans R, ce qui est automatique si R est de caractéristique banale.

Questions ouvertes

Concluons par les perspectives qu'ouvrent les résultats de cette thèse :

a. Il serait très intéressant de savoir si la correspondance de Howe s'étend à des R-représentations pour les paires duales de type I, même en caractéristique banale. En caractéristique non banale, il faudrait calculer plus d'exemples pour savoir ce qui se passe exactement. Il est possible que la conjecture de Howe soit vraie pour un grand nombre de représentations.

b. Pour les paires duales de type I, il est possible que certains des résultats présentés aident à généraliser les articles de G. Muic [Mu1] et [Mu2] à la recherche d'une correspondance explicite dans ce cas.

c. La suite logique du travail fait dans le troisième chapitre est d'essayer de calculer les paramètres de tous les sous-quotients de l'induite parabolique d'une représentation cuspidale et d'une irréductible. Ceci pourrait nous donner beaucoup d'informations sur les coefficients $m(b, a)$ de [Ze1, §7].

d. On aimerait bien aussi simplifier les hypothèses au long de la thèse : il est fort probable que la paramétrisation du théorème 1 (on pourrait peut être utiliser les derniers résultats de V. Sécherre) et la théorie des fonctions zêta s'étendent en toute caractéristique $l \neq p$. On voudrait aussi savoir si l'hypothèse (a) du théorème 3.1.1 est nécessaire.

Chapitre 1

Premier exemple : Thèse de Tate

1.1 Le problème

1.1.1. Le problème le plus simple que nous pouvons nous poser est celui de prouver la conjecture de Howe dans le cas où $D = F$ et $n = m = 1$. Ici F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, $\mathcal{P} = \varpi\mathcal{O}$ idéal maximal, ϖ une uniformisante, $k_F = \mathcal{O}/\mathcal{P}$ son corps résiduel et q le cardinal de k_F. Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique (éventuellement nulle) $l \neq p$. On fixe une racine carrée $q^{1/2}$ de q dans $R^\times$, ceci permet de considérer $|x|_F^t$, où $|\ | = |\ |_F = q^{-v_F}$ est la valeur absolue normalisée sur F, v_F est la valuation et t est un demi-entier.

Pour tout anneau commutatif A, notons $S_A(F)$ (resp. $S_A(F^\times)$) l'ensemble des fonctions $\Phi : F \to A$ (resp. $\Phi : F^\times \to A$) localement constantes à support compact.

On posera $S(F) = S_R(F)$ (resp. $S(F^\times) = S_R(F^\times)$) s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soit $\sigma : F^\times \times F^\times \to GL(S_R(F))$ la représentation naturelle définie par

$$\sigma(g, g')\,\Phi(x) = \Phi\left(g^{-1}xg'\right),$$

pour $g, g' \in F^\times, x \in F, \Phi \in S_R(F)$.

Le corps F, étant commutatif, toute R-représentation irréductible de $F^\times$ est de dimension 1 et donc la conjecture de Howe (théorème 6) dans ce cas particulier revient à prouver que pour tout caractère ω de $F^\times$ (à valeurs dans $R^\times$), si ω' est un autre caractère de $F^\times$ tel que $\omega \otimes \omega' : F^\times \times F^\times \to R^\times$ soit un quotient de σ, alors $\omega' = \omega^{-1}$ et

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{F^\times \times F^\times}\left(\sigma, \omega \otimes \omega^{-1}\right)\right) = 1.$$

On verra que la première assertion est toujours vraie mais que la deuxième, *i.e.* $\dim\left(\mathrm{Hom}_{F^\times\times F^\times}\left(\sigma,\omega\otimes\omega^{-1}\right)\right)=1$, sera vraie si l'on impose, de plus, au corps R d'être de caractéristique banale, $q\not\equiv 1 \mod l$.

1.1.2. Pour $H=F$ ou $H=F^\times$, une mesure de Haar sur H à valeurs dans un anneau commutatif quelconque A sera une forme linéaire μ_H non nulle sur $S_A(H)$ qui est invariante par translation par H. On note souvent :

$$\mu_H(f)=\int_H f(h)\,d\mu_H(h).$$

Pour tout sous-groupe compact K de H de pro-ordre inversible dans A, il existe toujours une mesure de Haar sur H telle que le volume de K soit 1 (*cf.* 2.1.2), et une telle mesure est unique.

Puisque $l\neq p$, il existe toujours $d\mu(x)$ une mesure de Haar sur F et $d\mu^\times(x)$ une mesure de Haar sur $F^\times$, et elles sont uniques à une constante près. Fixons les.

1.1.3. Notons $S'=S'(F)$ l'espace des distributions sur $S(F)$, *i.e.* l'espace des formes R-linéaires $\lambda : S(F)\to R$. L'action de $F^\times$ par multiplication sur $S(F)$ induit par dualité une action r sur $S'(F)$ telle que

$$\langle r(a)\lambda,\Phi\rangle=\langle\lambda,\Phi(\cdot\, a)\rangle.$$

Pour tout caractère ω de $F^\times$ à valeurs dans $R^\times$, notons $S'(\omega)$ l'ensemble des distributions λ telles que $r(a)\lambda=\omega(a)\lambda$. On dit que $S'(\omega)$ est la partie ω-isotypique de $S'(F)$.

On va étudier maintenant la géométrie de l'espace $S(F)$. Remarquons que l'action par multiplication de $F^\times$ sur F a deux orbites, 0 et $F^\times$, ce qui induit par dualité une suite exacte (*cf.* [BZ1, 1.9]) :

$$0\to S'(F)_0\to S'(F)\to S'\left(F^\times\right)\to 0,$$

où $S'(F)_0$ est l'espace des distributions à support dans $\{0\}$ et $S'(F^\times)$ est l'espace des distributions sur $S(F^\times)$. On prend les parties ω-isotypiques et on en déduit une suite exacte courte :

$$0\to S'(\omega)_0\to S'(\omega)\to S'\left(F^\times\right)(\omega), \tag{a}$$

où $S'(\omega)_0$ est l'espace des distributions à support dans $\{0\}$ et $S'(F^\times)(\omega)$ est l'espace des distributions sur $S(F^\times)$ ω-*invariants.* Le lemme ci-dessous est classique (*cf* [We3]) :

Lemme. *1. $S'(F^\times)(\omega)$ a dimension 1 sur R et est engendré par la distribution $\omega(x)\,d\mu^\times(x)$, i.e. pour toute distribution $\lambda\in S'(F^\times)(\omega)$ il existe $c\in R$ tel que pour toute fonction $\Phi\in S(F^\times)$,*

$$\lambda(\Phi)=c\int_{F^\times}\Phi(x)\,\omega(x)\,d\mu^\times(x).$$

2. *L'espace* $S'(\omega)_0$ *est nul sauf si* $\omega = 1$ *auquel il est de dimension* 1 *sur* R *engendré par la distribution* δ_0 *définie par* $\delta_0(\Phi) = \Phi(0)$.

1.1.4. Pour montrer la conjecture de Howe dans ce premier cas, il nous reste à voir deux choses :

1. Puisque si $\omega \neq 1$, alors $\dim(S'(\omega)_0) = 0$, il faut vérifier que la distribution $\omega(x)\, d\mu^{\times}(x)$ se relève en une distribution dans $S'(\omega)$. Pour cela, on introduira les fonctions zêta.
2. Si $\omega = 1$, il faudra montrer, par contre, que la distribution $d\mu^{\times}(x)$ ne se relève pas en une distribution dans $S'(\omega)$. On devra imposer ici la banalité de l d'où les remarques faites précédemment.

1.2 Les fonctions zêta

1.2.1. Le but de cette section est d'associer à chaque caractère ω, deux invariants $L(T,\omega)$, $\varepsilon(T,\omega,\psi)$, où T est une variable et ψ est un caractère non trivial de F. La *fonction L*, $L(T,\omega)$, est une fonction de la forme $\frac{1}{P(T)}$ avec $P \in R[T]$ un polynôme de degré au plus 1 tel que $P(0) = 1$. Le *facteur epsilon*, $\varepsilon(T,\omega,\psi)$, est une autre fonction simple de la forme AT^n, avec $A \in R^{\times}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Les fonctions zêta, quand $R = \mathbb{C}$, furent d'abord introduites par Tate dans sa thèse [Tat]. Un très bon exposé sur ce sujet est l'article de Kudla [Ku2] mais, pour montrer l'équation fonctionnelle, ses arguments ne sont plus suffisants dans notre cadre, à cause du fait que la dimension de $S'(\omega)$ est égale à 2 quand $q \equiv 1 \mod l$ et $\omega = 1$. On va utiliser ici un argument qui apparaît déjà dans [We3].

1.2.2. Fixons $\psi : F \to R^{\times}$ un caractère non trivial de F. Le niveau de ψ est le plus petit entier k tel que ψ soit trivial sur $\mathcal{P}^k$. Tout caractère de F peut s'écrire alors sous la forme ψ_a, avec $a \in F$ et $\psi_a(x) = \psi(ax)$. On fixe aussi une mesure de Haar $\mu(x)$ sur F. Pour toute fonction $\Phi \in S_R(F)$ on note $\widehat{\Phi}(x) = \int_F \Phi(y)\,\psi(xy)\, d\mu(y)$ sa transformée de Fourier.

La proposition suivante se montre comme dans le cas complexe :

Proposition. 1. *Pour toute fonction* $\Phi \in S_R(F)$, *on a* $\widehat{\Phi} \in S_R(F)$.

2. *Il existe* $c = c(\mu,\psi) \in R^{\times}$ *tel que pour toute fonction* $\Phi \in S_R(F)$,

$$\widehat{\widehat{\Phi}}(x) = c\Phi(-x).$$

3. *Pour ψ fixé, il existe une unique mesure de Haar μ_ψ, qui vérifie $\mu_\psi(\mathcal{O}) = q^{k/2}$, où k est le niveau de ψ. On a alors*

$$c\left(\mu_\psi, \psi\right) = 1.$$

4. *Pour tout $a \in F^\times$, $\mu_{a\psi} = |a|^{1/2}\, \mu_\psi$.*

La mesure μ_ψ est dite *auto-duale* par ψ.

Démonstration. Soit k le niveau de ψ et, pour tout entier j, soit Φ_j la fonction caractéristique de $\mathcal{P}^j$. Pour tout $a \in F$, le caractère ψ_a est trivial sur $\mathcal{P}^j$ si, et seulement si, $a \in \mathcal{P}^{k-j}$. Le support de $\widehat{\Phi_j}$ est donc $\mathcal{P}^{k-j}$ et

$$\widehat{\Phi_j} = \mu(\mathcal{O})q^{-j}, \qquad x \in \mathcal{P}^{k-j},$$

d'où (1) et (2) pour les fonctions Φ_j avec $c = \mu(\mathcal{O})^2 q^{-k}$. Pour $\Phi \in S_R\left(F\right)$, et $a \in F$, notons $\Psi(x) = \Phi(x-a) \in S_R\left(F\right)$. On a

$$\widehat{\Psi}(x) = \psi(ax)\widehat{\Phi}(x),$$

et donc $\widehat{\Psi} \in S_R\left(F\right)$. De plus

$$\widehat{\widehat{\Psi}}(x) = \widehat{\widehat{\Phi}}(a+x),$$

et donc si l'on a les relations (1) et (2) pour les fonctions Φ, elles sont aussi vérifiées pour les fonctions Ψ avec la même valeur de c.

Puisque les fonctions $x \mapsto \Phi_j(x-a)$ pour $j \in \mathbb{Z}, a \in F$ engendrent $S_R(F)$ on a montré (1) et (2) pour toute fonction dans cet espace. Les relations (3) et (4) sont maintenant immédiates. □

1.2.3. Pour tout caractère $\omega : F^\times \to R^\times$, toute fonction $\Phi \in S_R\left(F\right)$, tout entier N et toute mesure de Haar $\mu^\times\left(x\right)$ sur $F^\times$ l'intégrale

$$\int_{F^\times, |x| = q^{-N}} \Phi\left(x\right) \omega\left(x\right) d\mu^\times(x)$$

est bien définie. En effet $\{x \in F : v_F\left(x\right) = N\}$ est une partie compacte de $F^\times$ et Φ et ω sont localement constants sur cet ensemble.

On peut alors définir la somme formelle :

$$Z\left(\Phi, T, \omega\right) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \left(\int_{F^\times, |x| = q^{-N}} \Phi\left(x\right) \omega\left(x\right) d\mu^\times(x) \right) T^N.$$

Remarque. Comme Φ est à support compact, pour N assez petit on a :

$$\int_{F^\times,|x|=q^{-N}} \Phi(x)\,\omega(x)\,d\mu^\times(x) = 0.$$

Ainsi $Z(\Phi,T,\omega) \in R[[T]][T^{-1}]$

On note $\mathcal{Z}(\omega)$ l'image du morphisme

$$\begin{array}{ccc} S_R(F) & \longrightarrow & R((T)) \\ \Phi & \mapsto & Z(\Phi,T,\omega). \end{array}$$

Si $g, g' \in F^\times$. On a :

$$Z\left(\Phi\left(g^{-1}\cdot g'\right),T,\omega\right) = \omega(g)\,Z(\Phi,T,\omega)\,T^{v_F(g)-v_F(g')}\omega^{-1}(g').$$

Ainsi $\mathcal{Z}(\omega)$ est un module sur l'anneau principal $R[[T,T^{-1}]]$ des séries de Laurent.

Exemple. Soit ω un caractère. On dit qu'il est non ramifié si $\omega|\mathcal{O}^\times \equiv 1$, et il est ramifié sinon. Dans ce dernier cas le niveau de ω est le plus petit entier $k \geq 0$ tel que ω soit trivial sur $1+\mathcal{P}^k$.

Supposons qu'il est non ramifié : alors $\omega(\varpi)$ ne dépend pas du choix de ϖ, et pour tout $x \in F^\times$, $x = u\varpi^n$ avec $u \in \mathcal{O}^\times$, on a $\omega(x) = \omega(\varpi)^n$. Soit $\Phi = \mathbf{1}_{\mathcal{O}}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$. Alors

$$\begin{aligned} Z(\Phi,T,\omega) &= \sum_{N\geq 0}\left(\int_{F^\times,|x|=q^{-N}} \omega(x)\,d\mu^\times(x)\right)T^N \\ &= \sum_{N\geq 0}(\omega(\varpi)\,T)^N \int_{F^\times,|x|=q^{-N}} d^\times x \\ &= \mu\left(\mathcal{O}^\times\right)\frac{1}{1-\omega(\varpi)\,T} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } q \equiv 1 \mod l \\ \mu(\mathcal{O}^\times)\frac{1}{1-\omega(\varpi)T} & \text{si } q \not\equiv 1 \mod l. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.2.4. *Il existe des fonctions L, $L(T,\omega)$, i.e. des fonctions de la forme $\frac{1}{P_\omega(T)}$ avec $P_\omega \in R[T]$ un polynôme, $P\omega(0) = 1$ telles que*

$$\frac{Z(\Phi,T,\omega)}{L(T,\omega)} \in R\left[T,T^{-1}\right].$$

De plus on a :

1. *Si ω est non ramifié,*

$$L\left(T,\omega\right) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si\ q \equiv 1 \mod l \\ \frac{1}{1-\omega(\varpi)T} & si\ q \not\equiv 1 \mod l. \end{cases}$$

2. *Si ω est ramifié,*

$$L\left(T,\omega\right) = 1.$$

Démonstration. Si $v_F\left(x\right) = N$, alors pour N assez grand $\Phi\left(x\right) = \Phi\left(0\right)$ car Φ est localement constante. On a donc :

$$\begin{aligned} Z\left(\Phi,T,\omega\right) \quad &= \quad \sum_{N\leq N_1}\left(\int_{F^\times,|x|=q^{-N}}\Phi\left(x\right)\omega\left(x\right)d\mu^\times(x)\right)T^N + \\ &\qquad + \sum_{N\geq N_1}\Phi\left(0\right)\left(\int_{F^\times,|x|=q^{-N}}\omega\left(x\right)d\mu^\times(x)\right)T^N. \end{aligned}$$

Si ω est ramifié on a que

$$\int_{F^\times,|x|=q^{-N}}\omega\left(x\right)d\mu^\times(x) = 0,$$

et donc $Z\left(\Phi,T,\omega\right) \in R\left[T,T^{-1}\right]$.

Si, par contre, ω est non ramifié, alors

$$\begin{aligned} &\sum_{N\geq N_1}\Phi\left(0\right)\left(\int_{F^\times,|x|=q^{-N}}\omega\left(x\right)d\mu^\times(x)\right)T^N = \\ &\qquad = \sum_{N\geq N_1}\Phi\left(0\right)\left(\omega\left(\varpi\right)T\right)^N\left(\int_{F^\times,|x|=q^{-N}}d\mu^\times(x)\right) \\ &\qquad = \sum_{N\geq N_1}\Phi\left(0\right)\left(\omega\left(\varpi\right)T\right)^N\mu\left(\mathcal{O}^\times\right) \end{aligned}$$

est une série géométrique, de raison $\omega\left(\varpi\right)T$, d'où la proposition. □

Lemme 1.2.5. *Pour tout caractère $\omega : F^\times \to R^\times$ il existe $\Phi_0 \in S_R\left(F\right)$ telle que*

$$\frac{Z\left(\Phi_0,T,\omega\right)}{L\left(T,\omega\right)} = 1.$$

Démonstration. Si $L\left(T,\omega\right) = \frac{1}{1-\omega(\varpi)T}$ on pose $\Phi_0 = \mu^\times\left(\mathcal{O}^\times\right)^{-1}\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$.

Si $L\left(T,\omega\right) = 1$ on pose

$$\Phi_0 = \begin{cases} \mu^\times\left(1+\mathcal{P}\right)^{-1}\mathbf{1}_{1+\mathcal{P}} & \text{si } \omega \text{ est non ramifié (et } q\equiv 1 \mod l) \\ \mu^\times\left(1+\mathcal{P}^k\right)^{-1}\mathbf{1}_{1+\mathcal{P}^k} & \text{si } \omega \text{ est ramifié de niveau } k. \end{cases}$$

□

Corollaire. *L'idéal $\mathcal{Z}(\omega)$ est égal à $L(T,\omega)R\left[T,T^{-1}\right]$.*

1.2.6. Notons Λ_ω l'espace des applications R-linéaires $\lambda : S_R(F) \to R(T)$ vérifiant :

$$\lambda\left(\Phi(a^{-1}\,\cdot)\right) = \omega(a)T^{v_F(a)}\lambda\left(\Phi\right). \tag{a}$$

C'est un $R(T)$-espace vectoriel contenant le morphisme non nul $\Phi \mapsto Z\left(\Phi,T,\omega\right)$. Le lemme suivant va nous permettre de terminer la démonstration de la conjecture de Howe (théorème 6) dans ce premier cas précis et de montrer l'équation fonctionnelle.

Lemme. *L'espace Λ_ω est de dimension 1 sur $R(T)$.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$ tel que $1+\mathcal{P}^n \subset \ker\omega$. Notons Φ_k la fonction caractéristique de $1+\mathcal{P}^k$, $k \geq 1$. On considère le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_\omega & \longrightarrow & R\left(T\right) \\ \lambda & \mapsto & \lambda\left(\Phi_n\right). \end{array}$$

On va montrer qu'il est injectif ce qui achèvera la démonstration du lemme.

En effet, supposons que $\lambda\left(\Phi_n\right) = 0$. Par la définition (a), $\lambda\left(\Phi_k(a\,\cdot)\right) = \lambda\left(\Phi_k\right)$, pour $k \geq n$, $a \in 1+\mathcal{P}^n$ et $\lambda \in \Lambda_\omega$. Comme

$$\Phi_n = \sum_{a\in(1+\mathcal{P}^n)/\left(1+\mathcal{P}^k\right)} \Phi_k\left(a\,\cdot\right),$$

on a que

$$\lambda\left(\Phi_k\right) = q^{n-k}\lambda\left(\Phi_n\right) = 0, \text{ pour } k \geq n.$$

Puisque toute fonction $\Phi \in S_R(F^\times)$ est une combinaison linéaire de translatés des Φ_k, $k \geq n$, $\lambda\left(\Phi\right) = 0$ pour toute fonction $\Phi \in S_R(F^\times)$. Ainsi $\lambda\left(\Phi\right) = 0$ pour $\Phi \in S_R(F)$ ne dépend que de la valeur $\Phi(0)$. Donc $\lambda\left(\Phi(a\,\cdot)\right) = \lambda\left(\Phi\right)$, pour tout $a \in F^\times$ et (a) implique alors que $\lambda\left(\Phi\right) = 0$ et donc que $\lambda = 0$. □

1.2.7. Fixons un caractère ψ de F et notons dx la mesure auto-duale pour ψ. On calculera à partir d'ici les transformées de Fourier par rapport à cette mesure.

Théorème. *Soit ω un caractère de $F^\times$. Il existe une unique fraction rationnelle $\gamma(T,\omega,\psi) \in R(T)$ telle que*

$$Z\left(\Phi,T,\omega\right)\gamma\left(T,\omega,\psi\right) = Z\left(\widehat{\Phi},q^{-1}T^{-1},\omega^{-1}\right),$$

pour toute fonction $\Phi \in S(F)$.

Démonstration. D'après le lemme précédent il nous suffit de prouver que $\lambda_0 : \Phi \mapsto Z(\Phi, T, \omega)$ et $\lambda_1 : \Phi \mapsto Z\left(\widehat{\Phi}, q^{-1}T^{-1}, \omega^{-1}\right)$ appartiennent tous les deux à Λ_ω. On a déjà vu ça pour λ_0 et pour λ_1 il suffit de remarquer que :

$$\widehat{\Phi(a\,\cdot)} = |a|\,\widehat{\Phi}\left(a^{-1}\,\cdot\right).$$

$\square$

1.2.8. On termine maintenant la preuve du théorème 6, pour la paire duale $(GL_1(F), GL_1(F))$. D'abord, montrons que, pour tout caractère ω de $F^\times$, $\omega \otimes \omega^{-1} : F^\times \times F^\times \to R^\times$ est un quotient de σ.

Supposons $\omega \neq 1$, et montrons que la distribution $\omega(x)\,d\mu^\times(x)$ se relève en une distribution dans $S'(\omega)$. Si $\omega \neq 1$, alors $P_\omega(1) \neq 0$, et donc la distribution $\lambda \in S'(\omega)$, donnée par

$$\lambda(\Phi) = Z(\Phi, 1, \omega),$$

pour $\Phi \in S$, est bien définie. On trouve ainsi que $\omega \otimes \omega^{-1}$, est un quotient de σ.

Si $\omega = 1$, et $q \not\equiv 1 \mod l$, on va montrer que le fait que $P_\omega(1) = 0$ implique que la distribution $d\mu^\times(x)$ ne se relève pas en une distribution dans $S'(\omega)$. En effet, la pré-image de $d\mu^\times(x)$ dans $S'(F)$ n'est pas $F^\times$-invariant : explicitement, la distribution $\lambda_0 \in S'(F)$, définie par

$$\lambda_0(\Phi) = Z(\Phi - \Phi(0)\Phi_0, 1, \omega),$$

nous donne une pré-image de $d\mu^\times(x)$ dans $S'(F)$. Or, les distributions $r(\varpi)\lambda_0$ et λ_0 coïncident dans $S(F^\times)$ et donc diffèrent d'une distribution à support dans $\{0\}$, *i.e.* il existe $c \in R$ tel que $r(\varpi)\lambda_0 - \lambda_0 = c\delta_0$. Si λ_0 était $F^\times$-invariant, on aurait $c = 0$. Or :

$$\begin{aligned} c &= \langle r(\varpi)\lambda_0 - \lambda_0, \Phi_0 \rangle \\ &= \int_{F^\times} \Phi_0(\varpi x) - \Phi_0(x) d\mu^\times(x) \\ &= \mu^\times(\mathcal{O}^\times). \end{aligned}$$

Donc, si $q \not\equiv 1 \mod l$, alors λ_0 n'est pas $F^\times$-invariant, ce qui achève la preuve du théorème.

Remarque. Si $q \equiv 1 \mod l$, on trouve deux entrelacements non proportionnels entre σ et $1 \otimes 1$, donnés par :

1. $\Phi \mapsto \Phi(0)$,
2. $\Phi \mapsto Z(\Phi, 1, 1)$.

1.3 Calcul des facteurs gamma et epsilon

1.3.1. On définit $\varepsilon(T,\omega,\psi)$ par l'équation

$$\gamma(T,\omega,\psi)=\varepsilon(T,\omega,\psi)\frac{L(q^{-1}T^{-1},\omega^{-1})}{L(T,\omega)}. \tag{a}$$

L'équation fonctionnelle 1.2.7 s'écrit alors sous la forme plus usuelle :

$$\frac{Z(\Phi,T,\omega)}{L(T,\omega)}\varepsilon(T,\omega,\psi)=\frac{Z\left(\widehat{\Phi},q^{-1}T^{-1},\omega^{-1}\right)}{L(q^{-1}T^{-1},\omega^{-1})}. \tag{b}$$

Lemme. *1. $\varepsilon(T,\omega,\psi)$ est indépendant de Φ.*

2. $\varepsilon(T,\omega,\psi_a)=\omega(a)\left|a\right|^{-1/2}T^{v_F(a)}\varepsilon(T,\omega,\psi)$, pour tout $a\in F^\times$.

3. La fonction $\varepsilon(T,\omega,\psi)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varepsilon(T,\omega,\psi)\,\varepsilon\left(q^{-1}T^{-1},\omega^{-1},\psi\right)=\omega(-1).$$

4. $\varepsilon(T,\omega,\psi)=Z\left(\widehat{\Phi_0},q^{-1}T^{-1},\omega^{-1}\right)/L\left(q^{-1}T^{-1},\omega^{-1}\right)$.

5. $\varepsilon(T,\omega,\psi)$ est de la forme $A(\psi,\omega)T^{n(\psi,\omega)}$, $A(\psi,\omega)\in R^\times$, $n(\psi,\omega)\in\mathbb{Z}$.

Démonstration. (1) est une conséquence du fait que $\gamma(T,\omega,\psi)$ et $L(T,\omega)$ sont indépendantes de Φ.

(2) est une conséquence directe de 1.2.2.(4).

Le théorème 1.2.7 nous dit que

$$Z(\Phi,T,\omega)\,\gamma(T,\omega,\psi)=Z\left(\widehat{\Phi},q^{-1}T^{-1},\omega^{-1}\right).$$

On applique cette formule deux fois et on trouve

$$Z(\Phi,T,\omega)\,\gamma(T,\omega,\psi)\,\gamma\left(q^{-1}T^{-1},\omega^{-1},\psi\right)=Z\left(\widehat{\widehat{\Phi}},T,\omega\right).$$

Alors, puisque la mesure est auto-duale, $Z\left(\widehat{\widehat{\Phi}},T,\omega\right)=\omega(-1)Z(\Phi,T,\omega)$ et donc

$$\gamma(T,\omega,\psi)\,\gamma\left(q^{-1}T^{-1},\omega^{-1},\psi\right)=\varepsilon(T,\omega,\psi)\,\varepsilon\left(q^{-1}T^{-1},\omega^{-1},\psi\right)=\omega(-1).$$

(4) est une conséquence de l'équation fonctionnelle 1.3.1(b) et du lemme 1.2.5. Ainsi $\varepsilon(T,\omega,\psi)$ et $\varepsilon(T,\omega,\psi)^{-1}$ sont des polynômes en T et T^{-1} et l'équation fonctionnelle de (3) nous donne alors (5). $\square$

1.3.2. Le but de cette section est d'expliciter les constantes $A(\psi,\omega)$ et $n(\psi,\omega)$. Le lemme précédent nous dit qu'il suffit de les calculer pour un choix quelconque de ψ et nous donne une méthode pour y parvenir. Dans la section prochaine on verra une autre façon de faire ce calcul pour $R=\overline{\mathbb{F}_l}$, par réduction modulo l, une fois que l'on connaît le résultat en caractéristique 0 (*cf.* [Ku2], par exemple).

On va fixer donc le caractère ψ en le supposant de niveau 0. On considère dx la mesure de Haar sur F auto-duale pour ce choix, *i.e.* telle que le volume de $\mathcal{O}$ soit 1. Posons $d^\times x = q\frac{dx}{|x|}$. C'est la mesure de Haar sur $F^\times$ telle que le volume de $1+\mathcal{P}$ est 1. On définit la fonction Φ_0 par :

1. Si $L(T,\omega)=\frac{1}{1-\omega(\varpi)T}$, alors $\Phi_0 = 1/(q-1)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$.
2. Si $L(T,\omega)=1$, alors

$$\Phi_0 = \begin{cases} \mathbf{1}_{1+\mathcal{P}} & \text{si } \omega \text{ est non ramifié (et } q\equiv 1 \mod l) \\ q^{k-1}\mathbf{1}_{1+\mathcal{P}^k} & \text{si } \omega \text{ est ramifié de niveau } k. \end{cases}$$

Proposition. *Soit ω un caractère non ramifié*

$$\varepsilon(T,\omega,\psi) = \begin{cases} 1 & si\ q\not\equiv 1 \mod l \\ -\omega^{-1}(\varpi)T & si\ q\equiv 1 \mod l. \end{cases}$$

En particulier $n(\psi,\omega)=1$.

Démonstration. Avec notre choix de Φ_0,

$$\widehat{\Phi}_0(x) = \begin{cases} \Phi_0(x) & \text{si } q\not\equiv 1 \mod l \\ \psi(x)\mathbf{1}_{\mathcal{P}^{-1}} & \text{si } q\equiv 1 \mod l. \end{cases}$$

Si $q\not\equiv 1 \mod l$ le résultat est maintenant immédiat. Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned} Z\left(\widehat{\Phi_0}, T^{-1}, \omega^{-1}\right) &= \sum_{N\geq -1}\int_{|x|=q^{-N}} \psi(x)\omega^{-1}(x)d^\times x T^{-N} \\ &= \int_{|x|=q} \psi(x)\omega^{-1}(x)d^\times x T \\ &= -\psi(0)\omega^{-1}(\varpi)T \\ &= -\omega^{-1}(\varpi)T. \end{aligned}$$

□

Proposition. *Soit ω un caractère ramifié de niveau k*

$$\varepsilon(T,\omega,\psi) = q \sum_{x\in\mathcal{O}^\times/\left(1+\mathcal{P}^k\right)} \omega\left(\varpi^k x\right)^{-1}\psi\left(\varpi^k x\right)T^k.$$

En particulier $n(\psi,\omega) = k$.

Démonstration. Avec notre choix de Φ_0,

$$\widehat{\Phi}_0(x) = \psi(x)\mathbf{1}_{\mathcal{P}^{-k}},$$

et donc

$$\begin{aligned} Z\left(\widehat{\Phi_0}, q^{-1}T^{-1}, \omega^{-1}\right) &= \sum_{N\geq -k}\int_{|x|=q^{-N}} \psi(x)\omega^{-1}(x)d^\times x q^{-N}T^{-N} \\ &= \int_{|x|=q^k} \psi(x)\omega^{-1}(x)d^\times x q^k T^k \\ &= \int_{\mathcal{O}^\times} \psi(\varpi^k x)\omega^{-1}(\varpi^k x)d^\times x q^k T^k \\ &= q\sum_{x\in\mathcal{O}^\times/\left(1+\mathcal{P}^k\right)} \omega\left(\varpi^k x\right)^{-1}\psi\left(\varpi^k x\right)T^k. \end{aligned}$$

□

1.4 Réduction modulo l

1.4.1. Dans ce paragraphe on calcule les facteurs *epsilon* et *gamma* quand R est de caractéristique positive, d'une façon différente, par réduction modulo l. Supposons $R = \overline{\mathbb{Q}_l}$ un clôture algébrique de $\mathbb{Q}_l$; son anneau des entiers sera noté $\overline{\mathbb{Z}_l}$ et $\overline{\mathbb{F}_l}$ son corps résiduel qui est isomorphe à une clôture algébrique de $\mathbb{F}_l$. Notons $S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F)$ le sous-module de $S_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(F)$ des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}$. Notons aussi μ, $\mu^\times$ des mesures de Haar sur F et $F^\times$ respectivement à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}$ et $\overline{\mu}$, $\overline{\mu}^\times$ des mesures de Haar sur F et $F^\times$ respectivement à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}_l}$ telles que, si l'on note $r_l : \overline{\mathbb{Z}_l} \to \overline{\mathbb{F}_l}$, la réduction modulo l (*cf.* 2.1.10), on ait

$$\begin{aligned} r_l(\mu(\mathcal{O})) &= \overline{\mu}(\mathcal{O}), \\ r_l\left(\mu^\times(1+\mathcal{P})\right) &= \overline{\mu}^\times(1+\mathcal{P}). \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F)$ et toute fonction $\Psi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F^\times)$

$$\begin{aligned} r_l\left(\int_F \Phi(x)\,d\mu(x)\right) &= \int_F r_l(\Phi(x))\,d\overline{\mu}(x) \\ r_l\left(\int_{F^\times} \Psi(x)\,d\mu^\times(x)\right) &= \int_{F^\times} r_l(\Psi(x))\,d\overline{\mu}^\times(x). \end{aligned}$$

On déduit que, si ω est un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}^\times$, pour toute fonction $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F)$

$$r_l(Z(\Phi, T, \omega)) = Z(r_l(\Phi), T, r_l(\omega)). \tag{a}$$

Lemme. *Le polynôme* $L(T, r_l(\omega))^{-1}$ *divise* $r_l\left(L(T,\omega)^{-1}\right)$ *dans l'anneau* $\overline{\mathbb{F}_l}[T, T^{-1}]$.

On n'a pas toujours un égalité.

Démonstration. Puisque ω est un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}^\times$, la fonction $L(T,\omega) \in \overline{\mathbb{Z}_l}(T)$. Il suffit donc de montrer que, pour toute $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{F}_l}}(F)$

$$Z(\Phi, T, r_l(\omega))\, r_l(L(T,\omega))^{-1} \in \overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right].$$

Relevons Φ en $\widetilde{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F)$. On a bien

$$r_l\left(Z\left(\widetilde{\Phi}, T, \omega\right)\right) = Z(r_l(\Phi), T, r_l(\omega)).$$

Ainsi, puisque

$$Z\left(\widetilde{\Phi}, T, \omega\right) L(T,\omega)^{-1} \in \overline{\mathbb{Z}_l}\left[T, T^{-1}\right],$$

par réduction modulo l, on trouve que

$$r_l\left(Z\left(\widetilde{\Phi}, T, \omega\right)\right) r_l\left(L(T,\omega)^{-1}\right) \in \overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right],$$

et donc

$$Z(\Phi, T, r_l(\omega))\, r_l(L(T,\omega))^{-1} \in \overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right].$$

□

1.4.2. On vérifie que la proposition 1.2.2 est toujours correcte pour $R = \overline{\mathbb{Z}_l}$ et que, si $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F)$, alors $\widehat{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F)$ si l'on calcule la transformée de Fourier en utilisant la mesure auto-duale par rapport à ψ, un caractère de F

à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}^{\times}$. Remarquons qu'alors $r_l(\psi)$ est un caractère non trivial de $\overline{\mathbb{F}_l}$ tel que

$$r_l\left(\widehat{\Phi}\right) = \widehat{r_l\left(\Phi\right)}.$$

L'équation 1.4.1(a) nous montre que

$$\gamma\left(T, r_l\left(\omega\right), r_l\left(\psi\right)\right) = r_l\left(\gamma\left(T, \omega, \psi\right)\right).$$

Quant à la réduction modulo l du facteur epsilon, l'équation 1.3.1(a) et les calculs précédents nous donnent

Proposition. *1. Si $q \not\equiv 1 \mod l$ ou si ω est ramifié,*

$$\varepsilon\left(T, r_l\left(\omega\right), r_l\left(\psi\right)\right) = r_l\left(\varepsilon\left(T, \omega, \psi\right)\right).$$

2. Si $q \equiv 1 \mod l$ et que ω est non ramifié

$$\varepsilon\left(T, r_l\left(\omega\right), r_l\left(\psi\right)\right) = \left(-\omega\left(\varpi\right) T\right) r_l\left(\varepsilon\left(T, \omega, \psi\right)\right).$$

Démonstration. En effet, si $q \equiv 1 \mod l$ et que ω est non ramifié, on a

$$r_l\left(\frac{L\left(q^{-1}T^{-1}, \omega^{-1}\right)}{L\left(T, \omega\right)}\right) = -\omega\left(\varpi\right) T.$$

□

On retrouve ainsi les résultats de la section précédente.

Chapitre 2

Représentations de GL_n

2.1 Théorie générale

2.1.1. Soient F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, D une algèbre à division de centre F de dimension finie d^2 sur F, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, $\mathcal{P} = \varpi\mathcal{O}$ un idéal maximal, ϖ une uniformisante, $k_D = \mathcal{O}/\mathcal{P}$ son corps résiduel et q le cardinal de k_D. Soient aussi R un corps algébriquement clos de caractéristique $l \neq p$ (éventuellement nulle) et n et m des entiers strictement positifs.

On note $\mathcal{M}_{m,n}$ (resp. $\mathcal{M}_n$) l'ensemble de matrices $n \times m$ (resp. $n \times n$) à coefficients dans D et $\mathrm{Nrd}_{\mathcal{M}_n} : \mathcal{M}_n \to F$ la norme réduite. Le groupe $GL_n(D)$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n$ sera noté G_n. Le groupe trivial sera noté G_0. Les sous-groupes

$$K_i = \begin{cases} GL_n(\mathcal{O}) & \text{si } i = 0 \\ 1 + \varpi^i GL_n(\mathcal{O}) & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

forment un système fondamental de voisinages de l'identité dans G_n.

On dit que l est *banal* si l ne divise pas l'ordre du groupe fini $GL_n(k_D)$. Notons que cette définition dépend de l'entier n.

A toute partition (ordonnée) $\alpha = (n_1, \ldots, n_r)$ de l'entier n, correspond une décomposition en blocs de matrices carrées d'ordre n_i. On notera G_α le sous-groupe de G_n formé des matrices inversibles diagonales par blocs, P_α (resp. $\overline{P}_\alpha$) le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) par blocs, et U_α le sous-groupe de P_α formé des éléments dont les blocs diagonaux sont des matrices unité. Alors $\overline{P}_\alpha$ est conjugué à $P_{\overline{\alpha}}$ dans

G_n avec $\overline{\alpha} = (n_r, \ldots, n_1)$. On écrira les matrices $p \in P_\alpha$ sous la forme

$$p = \begin{pmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & u_{ij} & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & m_r \end{pmatrix}, \tag{a}$$

où $m_i \in G_{n_i}$.

2.1.2. *Mesure de Haar.* Pour tout groupe localement profini H, on note $S_R(H)$ le R-espace vectoriel des fonctions $\Phi : H \to R$ localement constantes à support compact.

Une mesure de Haar sur H à valeurs dans R est une forme linéaire μ_H non nulle sur $S_R(H)$ qui est invariante par translation à gauche par H. On note souvent :

$$\mu_H(\Phi) = \int_H \Phi(h)\, d\mu_H(h).$$

S'il existe un sous-groupe compact K de H de pro-ordre inversible dans R, il existe toujours une mesure de Haar sur H telle que le volume de K soit 1 (*cf.* [Vi1, I.2]) et une telle mesure est unique.

De la même façon on peut définir une mesure de Haar à droite ν_H. On définit le module de H comme l'unique caractère $\delta_H : H \to R^\times$ tel que $\delta_H \mu_H$ soit une mesure à droite sur H.

Exemple. a) Si $H = G_n$ alors $\delta_{G_n} = 1$.

b) Si H est groupe profini alors $\delta_H = 1$.

c) Si $H = P_\alpha$ de type $(n_1, \ldots, n_r)$ alors $\delta_P(p) = q^{d(p)}$

$$d(m) = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j<i} n_j - \sum_{j>i} n_j \right) v_F(\mathrm{Nrd}\, m_i),$$

avec les notations de 2.1.1(a) et où Nrd est la norme réduite.

2.1.3. *Mesure semi-invariante.* Soit H un sous-groupe fermé de G_n. Il existe alors (*cf.* [Vi1, I.2.8]) une forme linéaire non nulle $\dot{\nu}$, unique à une constante près, G_n invariant à droite sur l'espace $S_R(H \backslash G, \delta_H)$ des fonction $f : G_n \to R$ localement constantes à support compact modulo H telles que $f(hg) = \delta_H(h) f(g)$ pour tout $h \in H$ et tout $g \in G_n$.

Si $H = P$, par la décomposition de Iwasawa, $G = PK_0$, la restriction à K_0 nous donne un isomorphisme

$$S_R(P \backslash G, \delta_P) \to S_R((P \cap K_0) \backslash K_0, 1).$$

La *mesure semi-invariante* $\dot{\nu}$ induit, par restriction, une mesure semi-invariante sur $S_R\left((P \cap K_0) \backslash K_0, 1\right)$. Ainsi, si l est banal, la restriction de la mesure de Haar sur K_0 à $S_R\left((P \cap K_0) \backslash K_0, 1\right)$ est aussi une forme linéaire *non nulle* et donc elles sont égales à une constante près.

Remarquons que, si l est non banal, la restriction de la mesure de Haar sur K_0 à $S_R\left((P \cap K_0) \backslash K_0, 1\right)$ peut être la forme linéaire nulle et donc, dans ce cas, avec les notations habituelles, la formule

$$\int_G f(g)dg = \int_P \int_K f(pk)dpdk$$

n'est plus valable.

2.1.4. Définissons $\nu : G_n \to R$ par $\nu(g) = |\mathrm{Nrd}_{\mathcal{M}_n}(g)|_F$, où $|\ |_F$ est la valeur absolue normalisée sur F (par abus de notation on ne fera pas de distinction entre ν agissant sur G_n pour différents n). On fixe une racine carrée $q^{1/2}$ de q dans $R^\times$, ceci permet de considérer de puissances demi-entières de ν.

Dans cette thèse on ne considérera que des représentations lisses et le mot *représentation* voudra toujours dire *représentation lisse*. On notera $Alg\,(G)$ la catégorie des représentations de G.

On note $r_{(n_1,\ldots,n_r),n}$ (resp. $\overline{r}_{(n_1,\ldots,n_r),n}$) le foncteur de Jacquet normalisé (*cf.* [Vi1, II.2.1]) associé au parabolique standard P_α (resp. $\overline{P}_\alpha$).

Etant donnée une représentation ρ_i de chaque G_{n_i}, on note aussi

$$\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$$

la représentation $\mathrm{ind}_{P_\alpha}^{G_n}(\rho_1, \otimes \cdots \otimes \rho_r \otimes 1_{U_\alpha})$, où l'induite est normalisée. Puisque $l \neq p$, le foncteur de Jacquet et le foncteur d'induction sont exacts (*cf.* [Vi1, II.2.1]).

On a une réciprocité de Frobenius. Soient $(n_1, \ldots, n_r)$ une partition de n, ρ_i des représentations de chaque G_{n_i} et π une représentation de G_n ; on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}\,(\pi, \rho_1 \times \cdots \times \rho_r) \simeq \mathrm{Hom}\left(r_{(n_1,\ldots,n_r),n}(\pi), \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r\right). \qquad \text{(a)}$$

Si π est admissible (en particulier, si elle est irréductible) on a aussi (*cf.* [Vi1, II.3.8]) un isomorphisme de réciprocité *à la Casselman* :

$$\mathrm{Hom}\,(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r, \pi) \simeq \mathrm{Hom}\left(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r, \overline{r}_{(n_1,\ldots,n_r),n}(\pi)\right). \qquad \text{(b)}$$

Remarquons que l'on ne suppose pas que les ρ_i soient admissibles. Cet isomorphisme est également vrai pour π une représentation quelconque si l'on suppose $R = \mathbb{C}$ (*cf.* [Ber, Theorem 20]).

2.1.5. On notera $\mathrm{Irr}(G_n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G_n, $\mathcal{R}_n$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des G_n-modules de longueur finie identifié au $\mathbb{Z}$-module libre de base $(\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(G_n)}$: remarquons que pour $n = 0$, $G_0 = \{0\}$ et donc le groupe de Grothendieck $\mathcal{R}_0 \simeq \mathbb{Z}$. Le sous-semigroupe de $\mathcal{R}_n$ qui consiste en des sommes finies $\pi_1 + \cdots + \pi_k$ où $\pi_i \in \mathrm{Irr}(G_n)$, $k \geq 0$ sera noté $\mathcal{R}_n^+$. Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{R}_n,\\ \mathcal{R}^+ &= \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{R}_n^+.\end{aligned}$$

Si $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{R}$ on note $\pi_1 \leq \pi_2$ si $\pi_2 - \pi_1 \in \mathcal{R}^+$.

On note $\mathrm{s.\,s.}(\tau)$ (ou $\mathrm{JH}(\tau)$) l'image de τ dans $\mathcal{R}$ pour toute représentation de longueur finie τ. On définit sur $\mathcal{R}$ une multiplication

$$m(\rho_1 \otimes \rho_2) = \mathrm{s.\,s.}\,(\rho_1 \times \rho_2)\,.$$

Si π est une représentation de G_n on notera $\mathrm{gr}(\pi) = n$ et $\widetilde{\pi}$ la contragrédiente de π.

Si τ est une représentation de longueur finie, alors

$$\mathrm{s.\,s.}(\tau) = \bigoplus_{\pi_i\in\mathrm{Irr},1\leq i\leq r} m_i\pi_i.$$

On dit que les π_i forment une suite de composition de τ ou bien que τ est composée des représentations irréductibles π_i. On dit que m_i est la multiplicité de π_i dans τ.

2.1.6. On note Irr l'union disjointe

$$\mathrm{Irr} = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Irr}(G_n),$$

$\mathcal{C}$ le sous-ensemble de Irr formé de représentations *cuspidales*, *i.e.* les représentations irréductibles ρ telles que $r_{(n_1,\ldots,n_r),n}(\rho) = 0$ pour toute partition non triviale $(n_1, \ldots, n_r)$ de n, avec $\mathrm{gr}(\rho) = n$.

On pose aussi $\mathcal{C}^s$ le sous-ensemble de Irr formé de représentations *supercuspidales*, *i.e.* les représentations irréductibles ρ telles que ρ n'est pas sous-quotient d'une induite $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ avec $r \geq 2$. Toute représentation supercuspidale est cuspidale et la réciproque est vraie si l est banal (*cf.* [Vi1, II.3.9]).

Toute représentation irréductible π est sous-module d'une représentation de la forme $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ avec les $\rho_i \in \mathcal{C}$. De plus, l'ensemble $\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ est uniquement déterminé à l'ordre près (*cf.* [Vi1, II.2.20.]) et sera noté $\mathrm{supp}(\pi)$.

2.1.7. Pour toute représentation π admissible de G dans un R-espace vectoriel V, un coefficient de π est une fonction $f : G \to R$ de la forme $f(x) = \langle \pi(x) v, \widetilde{v} \rangle$ où $v \in V, \widetilde{v} \in \widetilde{V}$ sont fixés, ou une combinaison linéaire de telles fonctions. Si π est irréductible, on peut identifier canoniquement l'espace des coefficients à la $G \times G$-représentation $\pi \otimes \widetilde{\pi}$ où $G \times G$ agit par translation à gauche et à droite.

Tout coefficient f d'une représentation cuspidale π est à support compact modulo le centre (*cf.* [Vi1, II.2.7.]). D'ailleurs, il existe un sous-groupe compact H de G, de pro-ordre inversible dans R (H étant un sous-groupe du sous-groupe unipotent U de G qui est de pro-ordre inversible dans R) tel que

$$\int_H f(gh)\, d\mu(h) = 0 \quad \text{pour tout } g \in G. \tag{a}$$

2.1.8. *Lemme géométrique combinatoire (cf. [Ze1, 1.6.]).* Soient β, γ deux partitions de n, $\beta = (n_1, \dots, n_r)$, $\gamma = (m_1, \dots, m_s)$ et pour $i \in \{1, \dots r\}$ soit ρ_i une représentation de G_{n_i}. On veut calculer la suite de composition de $r_{(m_1,\dots,m_s),n}(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$.

Notons $M^{\beta,\gamma}$ l'ensemble des matrices $b = (b_{i,j})$ telles que

1. Les $b_{i,j}$ sont des entiers positifs,
2. $\sum_j b_{i,j} = n_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$; $\sum_i b_{i,j} = m_j$ pour tout $i = 1, \dots, s$.

Fixons $b \in M^{\beta,\gamma}$ et notons β_i la partition $(b_{i1}, \dots, b_{is})$ de n_i et γ_j la partition $(b_{1j}, \dots, b_{rj})$ de m_j.

D'après [Vi1, II.2.1], les $r_{\beta_i,n_i}(\rho_i)$ sont de longueur finie. Supposons alors $\mathrm{JH}\left(r_{\beta_i,n_i}(\rho_i)\right) = \left\{\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}, \dots \sigma_i^{(r_i)}\right\}$ où

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \cdots \otimes \sigma_{is}^{(k)},\ \sigma_{ij}^{(k)} \in \mathrm{Irr}\left(G_{b_{ij}}\right), \qquad k = 1, \dots, r_i.$$

Pour tous $k_1, \dots, k_r$ on pose

$$\sigma_j = \sigma_{1j}^{(k_1)} \times \sigma_{2j}^{(k_2)} \times \cdots \times \sigma_{rj}^{(k_r)}, \qquad 1 \leq k_j \leq r_j,$$

représentation de G_{m_j}, et

$$\sigma(k_1, \dots, k_r) = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_s,$$

représentation de G_γ.

Alors, d'après [Ze1, 1.6.], les $\sigma(k_1, \dots, k_r)$ quand on fait varier $(k_1, \dots, k_r)$ et $b \in M^{\beta,\gamma}$ forment une suite de composition de $r_{(m_1,\dots,m_s),n}\big(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r\big)$.

2.1.9. Une conséquence immédiate est le lemme ci-dessous :

Lemme 2.1.9.1. *Avec les notations précédentes, supposons que pour tout i, $1 \leq i \leq r$, toute partition (non nécessairement propre) $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2})$ de n_i et tout $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \sigma_{i2}^{(k)} \in \mathrm{JH}\left(r_{\beta_i,n_i}(\rho_i)\right)$ on ait*

1. *Ou bien* $\mathrm{supp}\left(\sigma_{i1}^{(k)}\right) \nsubseteq \bigcup_{1\leq j\leq i-1} \mathrm{supp}\left(\rho_j\right)$ *;*
2. *Ou bien* $\mathrm{supp}\left(\sigma_{i2}^{(k)}\right) \nsubseteq \bigcup_{i+1\leq j\leq r} \mathrm{supp}\left(\rho_j\right)$.

Alors $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{JH}\left(r_{\beta,n}\left(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r\right)\right)$.

Démonstration. D'après ce qui précède $r_{\beta,n}\left(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r\right)$ est composé des $\sigma(k_1, \ldots, k_r)$ quand on fait varier $(k_1, \ldots, k_r)$ et $b \in M^{\beta,\beta}$.

Si $b = \begin{pmatrix} n_1 & & & \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_r \end{pmatrix} \in M^{\beta,\beta}$, alors $\sigma(k_1, \ldots, k_r) = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ et $k_i = 1$ pour tout i.

Il suffit donc de montrer que pour tout $b \in M^{\beta,\beta}$, b non diagonale, et tout $(k_1, \ldots, k_r)$, $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \ldots, k_r)$. Or, si $b \neq Id_n$, il existe $j < i$ et $j' > i'$ tels que b_{ij} et $b_{i'j'}$ soient non nuls. Soient

$$\begin{aligned} i_0 &= \min\{i : \exists j < i, b_{ij} \neq 0\} \qquad & j_0 &= \min\{j : b_{i_0 j} \neq 0\}, \\ i'_0 &= \max\{i' : \exists j' > i', b_{i'j'} \neq 0\} \qquad & j'_0 &= \max\left\{j' : b_{i'_0 j'} \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (1), puisque $j_0 < i_0$, pour tout k_{i_0}, $\sigma_{i_0 j_0}^{(k_{i_0})} \nsubseteq \mathrm{supp}\,\rho_{j_0}$ et donc, ρ_{j_0} ne peut pas être un sous-quotient de σ_{j_0}. Ainsi, $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \ldots, k_r)$.

Par l'hypothèse (2), puisque $j'_0 > i'_0$, pour tout $k_{i'_0}$, $\sigma_{i'_0 j'_0}^{(k_{i'_0})} \nsubseteq \mathrm{supp}\,\rho_{j'_0}$ et donc, $\rho_{j'_0}$ ne peut pas être un sous-quotient de $\sigma_{j'_0}$. Ainsi, $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ n'est pas un sous-quotient de $\sigma(k_1, \ldots, k_r)$. $\square$

Corollaire 2.1.9.2. *Avec les notations précédentes, supposons que pour tout i, $1 \leq i \leq r$, toute partition $\beta_i = (b_{i1}, b_{i2})$ de n_i et tout $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i1}^{(k)} \otimes \sigma_{i2}^{(k)} \in \mathrm{JH}\left(r_{\beta_i,n_i}(\rho_i)\right)$ (resp. $\in \mathrm{JH}\left(\overline{r}_{\beta_i,n_i}(\rho_i)\right)$) on ait*

1. *Ou bien* $\mathrm{supp}\left(\sigma_{i1}^{(k)}\right) \nsubseteq \bigcup_{1\leq j\leq i-1} \mathrm{supp}\left(\rho_j\right)$ *;*
2. *Ou bien* $\mathrm{supp}\left(\sigma_{i2}^{(k)}\right) \nsubseteq \bigcup_{i+1\leq j\leq r} \mathrm{supp}\left(\rho_j\right)$.

Alors $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ a un seul sous-module (resp. quotient) irréductible et sa multiplicité dans l'induite est égale à 1.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme qui suit et du précédent. □

Lemme 2.1.9.3. *Supposons que $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité* 1 *dans*

$$\mathrm{JH}\left(r_{\beta,n}\left(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r\right)\right)$$
$$\textit{(resp.}\quad \mathrm{JH}\left(\overline{r}_{\beta,n}\left(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r\right)\right).\textit{)}$$

Alors $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ a un seul sous-module (resp. quotient) irréductible et sa multiplicité dans l'induite est égale à 1.

Démonstration. Supposons qu'il existe π_1 et π_2 deux sous-modules irréductibles de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ et posons $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. Ainsi

$$\dim\left(\mathrm{Hom}\left(\pi, \rho_1 \times \cdots \times \rho_r\right)\right) \geq 2.$$

Par 2.1.4(a), on trouve

$$\dim\left(\mathrm{Hom}\left(r_{\beta,n}\left(\pi\right), \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r\right)\right) \geq 2.$$

Or, par l'exactitude du foncteur de Jacquet,

$$\mathrm{JH}\left(r_{\beta,n}\left(\pi\right)\right) \leq \mathrm{JH}\left(r_{\beta,n}\left(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r\right)\right).$$

On trouve donc que $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ apparaît avec multiplicité au moins 2 dans $\mathrm{JH}\left(r_{\beta,n}\left(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r\right)\right)$ ce qui est absurde, par hypothèse.

Le même argument en utilisant 2.1.4(b) au lieu de 2.1.4(a), nous montre l'autre assertion. □

2.1.10. *Réduction modulo l.* Supposons que R est égal à $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Soit E un corps tel que $\mathbb{Q}_l \subset E \subset \overline{\mathbb{Q}_l}$. Une représentation (π, V) est réalisable sur E s'il existe une E-représentation (π_E, V_E) telle que (π, V) se déduise de (π_E, V_E) par extension des scalaires, *i.e.* est isomorphe à l'espace $\overline{\mathbb{Q}_l} \otimes V_E$ muni de l'action $id \otimes \pi_E$.

Toute $\overline{\mathbb{Q}_l}$-représentation irréductible est réalisable sur une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ (*cf.* [Vi1, II.4.7]) et la propriété d'être réalisable sur une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ est stable par induction, par l'action du foncteur de Jacquet et par sous-quotient (*cf.* [Vi1, II.4.10]).

Une représentation (π, V) de G est dite l-entière si elle est admissible et V contient un sous-$\overline{\mathbb{Z}_l}$-module libre $L \subset V$ qui engendre V (*i.e.* un réseau) et qui est stable par π.

On dit que le réseau L provient d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ s'il existe un $\mathcal{O}_E$-réseau L_E de V ($\mathcal{O}_E$ étant l'anneau des entiers de E), libre sur $\mathcal{O}_E$ et de type fini comme $G\mathcal{O}_E$-module tel que $L \simeq L_E \otimes_{\mathcal{O}_E} \overline{\mathbb{Z}_l}$. On note Λ l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}_l}$.

Proposition. *Soit (π, V) une représentation l-entière et soit L un réseau de V. Si la $\overline{\mathbb{F}_l}$-représentation $L/\Lambda L$ est de longueur finie alors la semisimplifiée* $\mathrm{s.s.}\,(L/\Lambda L)$ *est indépendante du choix de L et sera notée $r_l(\pi)$.*

Démonstration. *Cf.* [Vi1, I.9.6]. □

Proposition. *Soit (π, V) une représentation irréductible, l-entière et soit L un réseau de V. Alors $L/\Lambda L$ est de longueur finie et donc $r_l(\pi)$ est bien défini.*

Démonstration. D'après [Vi1, II.5.10], (π, V) a un réseau L provenant d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$. D'après [Vi1, II.5.11.b], $L/\Lambda L$ est alors de longueur finie. □

Corollaire. *Soit (π, V) une représentation de longueur finie, l-entière et soit L un réseau de V. Alors $L/\Lambda L$ est de longueur finie et donc $r_l(\pi)$ est bien défini.*

Proposition. *Soient (ρ_i, V_i), $1 \leq i \leq r$, des représentations irréductibles, l-entières. Alors la représentation $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ est l-entière, $r_l(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r)$ est bien défini et on a*

$$r_l(\rho_1 \times \ldots \rho_r) \simeq r_l(\rho_1) \times \cdots \times r_l(\rho_r).$$

Démonstration. Puisque les (ρ_i, V_i), $1 \leq i \leq r$, sont des représentations irréductibles, l-entières, alors, si l'on note L_i des réseaux de V_i, $1 \leq i \leq r$, les L_i proviennent tous d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$. Ainsi, le réseau $L_1 \times \cdots \times L_r$ (*cf.* [Vi1, II.4.14c]) de $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ provient aussi de E et clairement on a :

$$r_l(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r) \simeq r_l(\rho_1) \times \cdots \times r_l(\rho_r).$$

□

Proposition. *Soit (π, V) une représentation l-entière et soit L un réseau de V. On suppose que le réseau L provient d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$. Alors pour toute partition α de n la représentation $r_\alpha(\pi)$ est aussi l-entière et on a :*

$$r_l(r_\alpha(\pi)) = r_\alpha(r_l(\pi)).$$

Démonstration. Le réseau $r_\alpha(L)$ (*cf.* [Vi1, II.4.14d]) provient aussi de E d'où la proposition. □

On dit que π est *l-irréductible* si $r_l(\pi)$ est irréductible (*cf.* [Vi3, I3.4.(c)]).

On dit qu'une $\overline{\mathbb{F}_l}$-représentation $\overline{\pi}$ *se relève* s'il existe π une $\overline{\mathbb{Q}_l}$-représentation l-entière telle que

$$r_l(\pi) = \overline{\pi}.$$

Quand $D = F$ (*cf.* [Vi1, III.5.10]), toute représentation cuspidale $\overline{\sigma_i}$ se relève en une représentation cuspidale σ_i. il serait intéressant de savoir si cette propriété est vraie pour D quelconque.

2.1.11. Pour un ensemble X, $M(X)$ sera l'ensemble de tous les multi-ensembles dans X, *i.e,* des fonctions $m : X \to \mathbb{N}$ à support fini. On définit la somme de multi-ensembles de façon naturelle.

Si $\Omega \in M(\mathcal{C})$, on notera

$$|\Omega| = \sum_{\rho \in \mathcal{C}} \Omega(\rho)\, \mathrm{gr}(\rho).$$

2.1.12. On sait (*cf.* [Vi1, II.2.8]) que toute représentation irréductible de G est admissible et a un caractère central. Soit ω un caractère de $F^\times$, la catégorie des ω-représentations, *i.e.* des représentations de caractère central ω, est une catégorie abélienne. Lorsque l est banal, toute représentation cuspidale est projective dans cette catégorie (*cf.* [Vi1, II.3.9]).

On suppose dans le reste de ce paragraphe que R est de caractéristique *l banale*.

Soit Ω un multi-ensemble de représentations cuspidales, avec $|\Omega| = n$. On note $Fin(G_n)$ la sous-catégorie pleine de $Alg(G_n)$ des représentations de longueur finie et $Fin_n(\Omega)$ la sous-catégorie pleine de $Fin(G_n)$ telle que pour tout sous-quotient irréductible π de tout élément dans $Fin_n(\Omega)$, $\mathrm{supp}(\pi) = \Omega$.

Alors (*cf.* [Cas, Theorem 7.3.2], sa démonstration marche bien en caractéristique banale, parce que les représentations cuspidales sont projectives quand on fixe le caractère central) la catégorie $Fin(G_n)$ est produit direct des *blocs* $Fin_n(\Omega)$ quand Ω parcourt tous les multi-ensembles de représentations cuspidales de G_n avec $|\Omega| = n$.

On veut dire par cela,

1. Tout $\pi \in Fin(G_n)$ est une somme directe de représentations $\pi_i \in Fin_n(\Omega_i)$, où $\Omega_i \neq \Omega_j$ si $i \neq j$.
2. $\mathrm{Hom}(\pi_i, \pi_j) = 0$ si $\pi_i \in Fin_n(\Omega_i)$ et $\Omega_i \neq \Omega_j$.

Soient n, m deux entiers positifs, $n < m$, π est une représentation de longueur finie de G_m. Il existe $\Omega_i, \Omega'_j \in M(\mathcal{C})$, $|\Omega_i| = n$, $|\Omega'_j| = m - n$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, $\Omega_i \neq \Omega_{i'}$ si $i \neq i'$ et $\Omega'_j \neq \Omega'_{j'}$ si $j \neq j'$ tels que la représentation $r_{(n,m-n),m}(\pi)$ de $G_n \times G_{m-n}$ (étant de longueur finie) se décompose :

$$r_{(n,m-n),m}(\pi) = \bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=1}^{s}\Pi_{i,j}$$

avec tout sous-quotient irréducitble de $\Pi_{i,j}$ de la forme $\pi_i \otimes \pi'_j$ où $\pi_i \in \Omega_i$ et $\pi'_j \in \Omega'_j$.

Ainsi, si ρ une représentation irréductible de G_n, avec $\mathrm{supp}\,(\rho) = \Omega_i$, on pose

$$\mathrm{Jac}_\rho(\pi) = \bigoplus_{1\leq j\leq s} \Pi_{i,j},$$

et si ρ' une représentation irréductible de G_{m-n} avec $\mathrm{supp}\,(\rho') = \Omega'_j$, on pose

$$\overline{\mathrm{Jac}}_{\rho'}(\pi) = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \Pi_{i,j}.$$

Remarquons que $\mathrm{Jac}_\rho(\pi)$ et $\overline{\mathrm{Jac}}_{\rho'}(\pi)$ ne dépendent que du support cuspidal de ρ et ρ'.

Proposition 2.1.12.1. *Supposons qu'il existe $\rho \in \mathrm{Irr}(G_n)$, $V \in \mathrm{Irr}(G_{m-n})$ telles que $\rho \otimes V$ soit un sous-quotient de $r_{(n,m-n),m}(\pi)$. Il existe alors ρ' une représentation irréductible avec $\mathrm{supp}\,(\rho') = \mathrm{supp}\,(\rho)$ et une représentation $V' \in \mathrm{Irr}(G_{m-n})$ telles que π soit un sous-module de $\rho' \times V'$.*

Démonstration. Soit $\rho' \otimes V'$ un quotient irréductible de $\mathrm{Jac}_\rho(\pi)$. Alors ρ' est une représentation irréductible avec $\mathrm{supp}\,(\rho') = \mathrm{supp}\,(\rho)$ et, puisque

$$\mathrm{Hom}\left(r_{(n,m-n),m}(\pi), \mathrm{Jac}_\rho(\pi)\right) \neq 0$$

et

$$\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Jac}_\rho(\pi), \rho' \otimes V') \neq 0,$$

alors

$$\mathrm{Hom}\left(r_{(n,m-n),m}(\pi), \rho' \otimes V'\right) \neq 0,$$

et, par réciprocité de Frobenius on trouve l'énoncé de la proposition. □

Dans le cas particulier où $\rho \in \mathrm{Irr}(G_n)$ est une représentation induite par une seule cuspidale[1], *i.e* $\rho = \alpha \times \cdots \times \alpha$, avec $\alpha \in \mathcal{C}$, la proposition 2.1.12.1 devient :

Corollaire 2.1.12.2. *Si $\mathrm{Jac}_\rho(\pi) \neq \emptyset$ (resp. $\overline{\mathrm{Jac}}_\rho(\pi) \neq \emptyset$), il existe $V' \in \mathrm{Irr}(G_{m-n})$ telle que π soit un sous-module de $\rho \times V'$ (resp. $V' \times \rho$).*

[1]On verra (*cf.* 2.3.1) qu'une telle représentation est toujours irréductible si l est banal

Démonstration. Toute représentation irréductible ρ' avec $\operatorname{supp}(\rho') = \{\alpha, \ldots \alpha\}$ est, par hypothèse, de la forme $\rho' = \rho$. $\square$

2.1.13. *L'algèbre de Hecke.* Soit G un groupe défini sur F, $d\mu^\times$ une mesure de Haar sur G et notons $\mathcal{H}_R(G)$, l'algèbre des fonctions $f : G \to R$ localement constantes à support compact munie du produit de convolution, noté $*$. $\mathcal{H}_R(G)$, est appelée *algèbre de Hecke* de G, et on a (*cf.* [Vi1, I.4.4]) un isomorphisme de catégories entre :

1. La catégorie de représentations G.
2. La catégorie de modules sur $\mathcal{H}_R(G)$.

On passe de l'une à l'autre par la formule :

$$\pi(\phi)\, v = \int_G \phi(h)\, \pi(h)\, v\, d\mu^\times(h),$$

pour toute représentation (π, V) de G et où $\phi \in \mathcal{H}_R(G)$, $v \in V$.

Pour tout sous-groupe compact K de G de mesure non nulle, posons

$$e_K(x) = \begin{cases} \mu^\times(K)^{-1} & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

La sous-algèbre $\mathcal{H}_R(G, K)$ de $\mathcal{H}_R(G)$ définie par

$$\mathcal{H}_R(G, K) = e_K * \mathcal{H}_R(G) * e_K$$

est appelée *l'algèbre de Hecke relative à* K et, si $K = K_i$, $i \geq 1$ et l est banal, on a (*cf.* [Vi1, II.3.12]) un isomorphisme de catégories entre :

1. La catégorie de représentations V de G engendrées par V^K
2. La catégorie de modules sur $\mathcal{H}_R(G, K)$.

On passe de l'une à l'autre par les formules :

$$\begin{aligned} f_K &: V \mapsto V^K \\ g_K &: M \mapsto \mathcal{H}_R(G) \otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} M. \end{aligned}$$

pour toute représentation V de G et tout $\mathcal{H}_R(G, K)$-module M. Le foncteur f_K est exact et, si V est une représentation de G cyclique engendrée par un vecteur K-invariant v, alors le $\mathcal{H}_R(G, K)$-module V^K est aussi cyclique engendré par v (*cf.*, par exemple, [Laz]).

Lorsque K est de mesure non inversible, on peut encore définir les algèbres de Hecke relatives (*cf.* [Vi1, I.3.3]) $\mathcal{H}_R(G, K)$ mais le foncteur f_K, bien qu'il soit défini, n'est plus exact.

2.1.14. *Commutativité de l'algèbre* $\mathcal{R}$. Soient $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n_1}), \pi_2 \in \mathrm{Irr}(G_{n_2})$. Dans ce paragraphe on va montrer que, si l est banal,

$$\mathrm{s.\,s.}\,(\pi_1 \times \pi_2) \simeq \mathrm{s.\,s.}\,(\pi_2 \times \pi_1)\,.$$

Dans le cas où la caractéristique de R est nulle on pourrait utiliser l'argument classique, à savoir, on montre que les caractères traces des représentations irréductibles de G_n sont des fonctions localement intégrables [Lem] et on vérifie comme dans [Dij] que les caractères traces des représentations $\pi_1 \times \pi_2$ et $\pi_2 \times \pi_1$ sont égaux.

Ici on va utiliser un autre argument classique d'irréductibilité générique et appliquer les résultats de [Dat].

Notons Ψ l'ensemble

$$\Psi = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_i \text{ caractère non ramifié de } G_{n_i}\}\,.$$

Les caractères non ramifiés de G_i sont de la forme (*cf.* [Vi1, I.3.8.3]) $\psi \circ \mathrm{Nrd}$ où ψ est un caractère non ramifié de $F^\times$.

Ainsi $\Psi \simeq R^{\times 2}$ et donc Ψ a une structure de variété algébrique définie sur R. Pour chaque $(\xi_1, \xi_2) \in \Psi$, (ξ_1, ξ_2) correspond à un couple $(s, u) \in R^{\times 2}$ et on notera

$$(\pi_1(s), \pi_2(u)) = (\pi_1\xi_1, \pi_2\xi_2)\,.$$

On va montrer que

$$\mathrm{s.\,s.}\,(\pi_1(s) \times \pi_2(u)) \simeq \mathrm{s.\,s.}\,(\pi_2(u) \times \pi_1(s))\,,$$

pour tout $(u, s) \in R^{\times 2}$.

D'après [Dat, Theorem 5.1], $\pi_1(s) \times \pi_2(u)$ et $\pi_2(u) \times \pi_1(s)$ sont irréductibles pour (u, s) générique. Par le lemme géométrique, $\pi_2(u) \otimes \pi_1(s)$ est un sous-quotient de

$$r_{(n_2,n_1),n_1+n_2}\,(\pi_1(s) \times \pi_2(u))\,.$$

On voit que, pour (u, s) générique, tous les sous-quotients de la représentation $r_{(n_2,n_1),n_1+n_2}\,(\pi_1(s) \times \pi_2(u))$ sauf $\pi_2(u) \otimes \pi_1(s)$, par le lemme géométrique, ont des caractères centraux différents du caractère central de $\pi_2(u) \otimes \pi_1(s)$. Ainsi, pour (u, s) générique, $\pi_2(u) \otimes \pi_1(s)$ est un facteur direct de $r_{(n_2,n_1),n_1+n_2}\,(\pi_1(s) \times \pi_2(u))$ et donc

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}\left(r_{(n_2,n_1),n_1+n_2}\,(\pi_1(s) \times \pi_2(u))\,, \pi_2(u) \otimes \pi_1(s)\right) \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Hom}\,(\pi_1(s) \times \pi_2(u), \pi_2(u) \times \pi_1(s)) \neq 0. \end{aligned}$$

Puisque $\pi_1(s) \times \pi_2(u)$ et $\pi_2(u) \times \pi_1(s)$ sont irréductibles, on a donc que

$$\pi_1(s) \times \pi_2(u) \simeq \pi_2(u) \times \pi_1(s),$$

pour (u, s) générique.

Pour tout $n \geq 0$ et tout $(u, s) \in R^{\times 2}$, notons $V_n(u, s)$ (resp. $W_n(u, s)$) le sous-espace de $\pi_1(s) \times \pi_2(u)$ (resp. $\pi_2(u) \times \pi_1(s)$) des vecteurs K_n-invariants. C'est un espace de dimension finie sur R.

D'après 2.1.13, $V_n(u, s)$ (resp. $W_n(u, s)$) est un $\mathcal{H}(G, K_n)$-module. On va montrer que

$$\mathrm{s.\,s.}\,(V_n(u, s)) \simeq \mathrm{s.\,s.}\,(W_n(u, s))\,. \tag{a}$$

en tant que $\mathcal{H}(G, K_n)$-modules, pour tout $(u, s) \in R^{\times 2}$.

D'après ce qui précède et 2.1.13, pour (u, s) générique et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$V_n(u, s) \simeq W_n(u, s).$$

en tant que $\mathcal{H}(G, K_n)$-modules.

On a donc que pour (u, s) générique, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in \mathcal{H}(G, K_n)$ on a une égalité des polynômes caractéristiques de h sur $V_n(u, s)$ et $W_n(u, s)$:

$$P_{\mathrm{car}, V_n(u,s)}(h) = P_{\mathrm{car}, W_n(u,s)}(h). \tag{b}$$

La fonction qui à chaque $(u, s) \in \Psi$ associe les coefficients des polynômes caractéristiques d'un élément $h \in \mathcal{H}(G, K_n)$ dans $V_n(u, s)$ (resp. $W_n(u, s)$) est une fonction régulière de la variété Ψ car ces coefficients dépendent polynomialement des coefficients de la matrice de h. L'identité (b), vraie pour un ensemble dense, est donc vraie pour tout $(u, s) \in \Psi$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in \mathcal{H}(G, K_n)$.

Lemme. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{H}(G, K_n)$-modules de dimension finie sur R telles que tout $h \in \mathcal{H}(G, K_n)$ on a une égalité des polynômes caractéristiques de h sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:*

$$P_{car,\mathcal{A}}(h) = P_{car,\mathcal{B}}(h).$$

Alors

$$\mathrm{s.\,s.}\,\mathcal{A} \simeq \mathrm{s.\,s.}\,\mathcal{B}.$$

en tant que $\mathcal{H}(G, K_n)$-modules.

Démonstration. En effet, si

$$\mathrm{s.\,s.}\,(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i \in I} d_i M_i, \qquad \mathrm{s.\,s.}\,(\mathcal{B}) = \bigoplus_{i \in I} e_i M_i,$$

et, $d_{i_0} \neq e_{i_0}$, d'après [Bou, §2, n°2, cor 2 du Th. 1], il existe $h_0 \in \mathcal{H}(G, K_n)$ tel que

$$\begin{aligned} h|_{M_{i_0}} &= 1_{M_{i_0}} \\ h|_{M_j} &= 0 \qquad \forall j \neq i_0. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque

$$P_{\mathrm{car},\mathcal{A}}(h_0) = P_{\mathrm{car},\mathcal{B}}(h_0),$$

on a que

$$(\lambda - 1)^{d_{i_0}} = (\lambda - 1)^{e_{i_0}}$$

et donc

$$d_{i_0} = e_{i_0}.$$

□

Ainsi, pour tout entier n et tout $(u, s) \in R^{\times 2}$, on a :

$$\mathrm{s.\,s.}\,(V_n(u,s)) \simeq \mathrm{s.\,s.}\,(W_n(u,s))\,. \tag{c}$$

en tant que $\mathcal{H}(G, K_n)$-modules.

Lemme. *Pour toute représentation de longueur finie τ, il existe $n \geq 1$ tel que τ soit engendrée par ses vecteurs K_n-invariants.*

Démonstration. Par récurrence sur la longueur de τ. Si τ est irréductible, c'est une conséquence immédiate du lemme de Schur. Sinon τ est composée de τ_1 irréductible et τ_2 de longueur strictement inférieure à la longueur de τ. Par hypothèse de récurrence il existe $n \geq 1$ tel que τ_1 et τ_2 soient engendrées par ses vecteurs K_n-invariants d'où le lemme. □

Ainsi pour tout $(u, s) \in R^{\times 2}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_n(u, s) = \pi_1(s) \times \pi_2(u)$ (resp. $W_n(u, s) = \pi_2(u) \times \pi_1(s)$). Or,

$$\mathrm{s.\,s.}\,(V_n(u,s)) \simeq \mathrm{s.\,s.}\,(W_n(u,s))\,.$$

en tant que $\mathcal{H}(G, K_n)$-modules. La semisimplification commute au passage aux vecteurs K_n invariants et on a donc, d'après l'équivalence de catégories 2.1.13, que

$$\mathrm{s.\,s.}\,(\pi_1(s) \times \pi_2(u)) \simeq \mathrm{s.\,s.}\,(\pi_2(u) \times \pi_1(s))\,,$$

en tant que G-modules.

Dans le cas où $D = F$ et $l \neq 2$ on peut aussi utiliser l'argument suivant : Soient n un entier strictement positif quelconque et w l'élément de G_n

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On définit un automorphisme involutif i de G_n par

$$i(g) = w^t g^{-1} w,$$

pour tout $g \in G_n$. On en déduit une involution, encore notée i, de la catégorie des R-représentations lisses de G_n. Il est clair que :

– si π est une représentation irréductible de G_n, $i(\pi)$ est encore irréductible ;
– i est un foncteur covariant exact. En particulier, pour toute représentation π de G_n, les sous-représentations irréductibles de $i(\pi)$ sont les images par i des sous-représentations irréductibles de π ;
– soient $(n_1, \ldots, n_r)$ une partition de n et ρ_i des représentations de chaque G_{n_i}
$$i\left(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r\right) \simeq i\left(\rho_r\right) \times \cdots \times \left(\rho_1\right);$$
– d'après [GK] si $\pi \in \mathrm{Irr}$, alors[2] $i(\pi) \simeq \widetilde{\pi}$.

Ainsi, par exactitude du foncteur i, pour toutes $\pi_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n_1}), \pi_2 \in \mathrm{Irr}(G_{n_2})$, si $\{\tau_i\}$ forment une suite de composition de $\pi_1 \times \pi_2$ alors $\{\widetilde{\tau_i}\}$ forment une suite de composition de $\widetilde{\pi_2} \times \widetilde{\pi_1}$ et donc $\{\tau_i\}$, par passage à la contragrédiente, forment une suite de composition de $\pi_2 \times \pi_1$ ce qui montre que l'algèbre $\mathcal{R}$ est commutative, dans ce cas.

Remarque. Si $D \neq F$ la transposée d'une matrice inversible n'est pas forcément inversible et donc cette dualité n'est pas bien définie.

2.2 Représentations complexes de GL_n

On suppose dans cette section que $R = \mathbb{C}$ et on fixera la racine de q telle que $\sqrt{q} > 0$. On va rappeler ici quelques résultats de [Tad][3].

2.2.1. Dans [Tad, §2], on montre qu'il existe une fonction qui, à chaque représentation cuspidale ρ associe un entier strictement positif s_ρ tel que, si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations cuspidales de $GL_{n_1}(D)$ et $GL_{n_2}(D)$, $n_1, n_2 \geq 1$ alors $\rho_1 \times \rho_2$ est réductible si, et seulement si

$$\rho_1 = \nu^{s_{\rho_1}} \rho_2 \text{ ou } \rho_1 = \nu^{-s_{\rho_1}} \rho_2.$$

Pour toute représentation ρ cuspidale on notera $\nu_\rho = \nu^{s_\rho}$.

[2] Leurs arguments sont valables en toute caractéristique $l \neq 2$. En effet, le seul problème de leur preuve, pour l'étendre aux caractéristiques positives se trouve dans la démonstration du théorème 6.10 de [BZ1], laquelle, a priori, n'est pas valable en caractéristique $l = 2$.

[3] Les preuves dans [Tad] sont écrites pour F un corps de caractéristique nulle mais ces résultats sont aussi vrais (*cf.* 2.4.1) pour F de caractéristique quelconque d'après [Ba2].

2.2.2. Soit $\rho \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\Delta = \left\{\rho, \nu_\rho \rho, \ldots, \nu_\rho^{n-1}\rho\right\}.$$

On appelle Δ un segment et l'ensemble de tous les segments sera noté S.

On dit que $\Delta = \left\{\rho, \nu_\rho \rho, \ldots, \nu_\rho^{n-1}\rho\right\}$, $\Delta' = \left\{\rho', \nu_{\rho'} \rho', \ldots, \nu_{\rho'}^{n'-1}\rho'\right\}$ sont liés si $\Delta \cup \Delta'$ est encore un segment et $\Delta \not\subseteq \Delta'$ et $\Delta' \not\subseteq \Delta$.

On dit que Δ précède Δ' s'ils sont liés et il existe $\tau \in \Delta$ tel que $\rho' = \tau\nu_\tau$. On dit que $\Delta \geq \Delta'$ s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\rho = \nu_\rho^r \rho', \text{ ou bien } \rho = \rho' \text{ et } n \geq n'.$$

L'ordre ainsi défini n'est total que si l'on se restreint à des segments inclus dans l'ensemble $\left\{\rho\nu_\rho^t : t \in \mathbb{Z}\right\}$.

Un *multisegment* est un multi-ensemble de segments de la forme ci-dessus. On dira qu'un multisegment est rangé si l'on peut l'identifier à l'ensemble indicé $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ où

$$\Delta_r \not< \Delta_{r-1} \not< \cdots \not< \Delta_2 \not< \Delta_1.$$

Tout multisegment peut se ranger d'une telle façon. On définit le support d'un multisegment $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ comme

$$\bigcup_{1 \leq i \leq r} \Delta_i.$$

L'ensemble des multi-segments dont le support est inclus dans l'ensemble $\left\{\rho\nu_\rho^t : t \in \mathbb{Z}\right\}$ est noté $M(S)_\rho$ et est muni d'un ordre total grâce à l'ordre précédent défini sur les segments prolongé lexicographiquement, *i.e.* soient $m = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$, $m' = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'})$ deux multisegments rangés, on a $m \geq m'$ si :

$$\begin{array}{lrcl} & \Delta_1 & > & \Delta'_1 \\ \text{ou} & \Delta_1 & = & \Delta'_1 \text{ et } \Delta_2 > \Delta'_2 \\ \text{ou} & & \vdots & \\ \text{ou} & \Delta_1 = \Delta'_1 & \ldots & \Delta_{r'} = \Delta'_{r'}, \text{ et } r \geq r'. \end{array}$$

2.2.3. Soit ρ une représentation cuspidale de G_p ; puisque $\rho \otimes \nu_\rho \rho \neq \nu_\rho \rho \otimes \rho$, la représentation $\rho \times \nu_\rho \rho$, par Frobenius (2.1.4(a)), ne peut pas être semi-simple. En effet,

$$\mathrm{Hom}\left(\rho \times \nu_\rho \rho, \rho \times \nu_\rho \rho\right) = \mathrm{Hom}\left(r_{(p,p)2p}\left(\rho \times \nu_\rho \rho\right), \rho \otimes \nu_\rho \rho\right).$$

Par le lemme géométrique, $r_{(p,p)2p}(\rho \times \nu_\rho\rho)$ est composé de $\rho\otimes\nu_\rho\rho$ et $\nu_\rho\rho\otimes\rho$ et donc, puisque ces deux représentations sont différentes, la dimension de $\mathrm{Hom}(\rho \times \nu_\rho\rho, \nu_\rho\rho \times \rho)$ vaut 1, et donc la représentation $\rho \times \nu_\rho\rho$ ne peut pas être semi-simple (car elle est de longueur 2).

Ainsi les résultats de [Ze1, §2] sont vrais et on a :

Proposition. *A chaque segment $\Delta = \{\rho, \nu_\rho\rho, \dots, \nu_\rho^{n-1}\rho\}$, ρ étant une représentation cuspidale de G_p, on peut associer des représentations irréductibles $\langle\Delta\rangle$ et $\langle\Delta\rangle^t$ telles que*

1. *$\langle\Delta\rangle$ (resp. $\langle\Delta\rangle^t$) est l'unique sous-module (resp. quotient) irréductible de $\rho \times \nu_\rho\rho \times \cdots \times \nu_\rho^{n-1}\rho$.*
2. *$r_{(p,\dots,p),np}(\langle\Delta\rangle) = \rho\otimes\nu_\rho\rho\otimes\cdots\otimes\nu_\rho^{n-1}\rho$ (resp. $r_{(p,\dots,p),np}(\langle\Delta\rangle^t) = \nu_\rho^{n-1}\rho\otimes\cdots\otimes\nu_\rho\rho\otimes\rho$).*

Les représentations $\langle\Delta\rangle$ et $\langle\Delta\rangle^t$ sont aussi caractérisées par la propriété (2). L'ensemble de représentations de la forme $\langle\Delta\rangle^t$ est l'ensemble des représentations essentiellement de carré intégrable (cf. [Aue]).

Démonstration. *Cf.* [Tad, 2.7.] □

2.2.4. A partir d'un argument d'unitarité on montre le théorème suivant, clé dans toute la construction qui suit :

Théorème. *Si la représentation $\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t$ est réductible, alors il existe des segments Δ_i et Δ_j qui sont liés.*

Démonstration. *Cf.* [Tad, 2.5.] □

2.2.5. Avec ces notations le théorème du quotient de Langlands implique :

Théorème.
1. *Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments. Supposons que, si $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j. Alors la représentation $\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t$ admet un unique quotient irréductible. On le note $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$. La multiplicité de $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$ dans $\mathrm{JH}\left(\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t\right)$ est égale à* 1.
2. *Les représentations $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$ et $\langle\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\rangle^t$ sont équivalentes si, et seulement si, les suites $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ et $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$ sont égales à l'ordre près.*
3. *Toute représentation irréductible de G_n est de la forme $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$.*

Démonstration. En effet, les arguments sont les mêmes que dans [Rod] : d'après [Tad, §2], l'application $\Delta \mapsto \langle\Delta\rangle^t$ est une bijection entre S et l'ensemble de représentations essentiellement de carré intégrable. Le théorème découle du fait que, par la proposition 2.2.4, la représentation $\langle\Delta_1\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle^t$

est isomorphe à la représentation $\left\langle\Delta_{\sigma(1)}\right\rangle^t\times\cdots\times\left\langle\Delta_{\sigma(r)}\right\rangle^t$, où σ est une permutation telle que l'ensemble $(\Delta_{\sigma(1)},\ldots,\Delta_{\sigma(r)})$ soit ordonné selon les conditions du théorème du quotient de Langlands. □

Remarque. On verra que la preuve du théorème 2.3.6 donne une autre démonstration (purement combinatoire et bien détaillée) du théorème précédent.

Remarque 2.2.5.1. $\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_r\rangle^t$ est aussi l'unique sous-module irréductible de $\langle\Delta_r\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_1\rangle^t$. En effet, par le théorème du quotient de Langlands, $\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_r\rangle^t$ est aussi l'unique sous-module irréductible de

$$\left\langle\Delta_{\sigma(r)}\right\rangle^t\times\cdots\times\left\langle\Delta_{\sigma(1)}\right\rangle^t,$$

σ étant définie comme dans la preuve de 2.2.5. Ce sous-module, par 2.2.4, est isomorphe à $\langle\Delta_r\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_1\rangle^t$.

Remarque 2.2.5.2. Si $\{\Delta_1,\ldots,\Delta_r\}$ est un multi-segment rangé, avec $\Delta_1=\left\{\rho,\nu_\rho\rho,\ldots,\nu_\rho^{n-1}\rho\right\}$, alors

$$\overline{\mathrm{Jac}}_\rho\left(\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_r\rangle^t\right)\neq\emptyset.$$

En effet, $\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_r\rangle^t$ étant un quotient de $\langle\Delta_1\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle^t$, $\langle\Delta_1\rangle^t\otimes\cdots\otimes\langle\Delta_r\rangle^t\in\overline{r}\left(\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_r\rangle^t\right)$.

2.2.6. Les trois propositions ci-dessous seront très pratiques par la suite :

Proposition 2.2.6.1. *Soient $a_1,\ldots,a_r$ des multi-segments et supposons que, si $i\neq j$, aucun segment Δ de a_i ne soit lié à un segment Δ' de a_j. Alors (cf. 2.1.11)*

$$\langle a_1+\cdots+a_r\rangle^t=\langle a_1\rangle^t\times\cdots\times\langle a_r\rangle^t.$$

Démonstration. Cf. [Tad, Proposition 2.2] et le théorème 2.2.4. □

Proposition 2.2.6.2. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux segments liés. Alors*

$$\mathrm{s.s.}\left(\langle\Delta_1\rangle^t\times\langle\Delta_2\rangle^t\right) \;=\; \langle\Delta_1,\Delta_2\rangle^t+\left(\langle\Delta_1\cup\Delta_2\rangle^t\times\langle\Delta_1\cap\Delta_2\rangle^t\right).$$

Démonstration. Cf. [Tad, Proposition 4.3] □

Proposition 2.2.6.3. *Pour qu'une représentation $\langle\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s\rangle^t$ soit isomorphe à un sous-quotient irréductible de $\langle\Delta_1\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle^t$, il faut et il suffit que le multisegment $(\Delta'_1,\ldots,\Delta'_s)$ se déduise de $(\Delta_1,\ldots,\Delta_r)$ par une suite d'"opérations élémentaires" consistant à remplacer deux segments liés Δ et Δ' par $\Delta\cup\Delta'$ et $\Delta\cap\Delta'$.*

Démonstration. Cf. [Tad, Theorem 5.3] □

2.2.7. $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathcal{C}$ par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ (k, \rho) & \mapsto & \nu_\rho^k \rho. \end{array}$$

Soit X un ensemble de représentants des orbites et, pour $\rho \in \mathcal{C}$ notons $\mathcal{R}(\rho)$ son orbite. La proposition précédente implique, comme dans [Ze1, 7.5], que

Corollaire. *1.* $\mathcal{R} = \bigotimes_{\rho \in X} \mathcal{R}(\rho)$

2. L'algèbre $\mathcal{R}$ est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Z}$ en les indéterminées $\langle \Delta \rangle$ (resp. $\langle \Delta \rangle^t$) où Δ décrit l'ensemble des segments.

La flèche $\langle \Delta \rangle \mapsto \langle \Delta \rangle^t$ s'étend de façon unique, en un endomorphisme involutif (*cf.* [Tad, §3]), que l'on appellera l'involution de Zelevinskii, $\pi \mapsto \tau(\pi)$ de l'algèbre $\mathcal{R}$.

2.3 Représentations en caractéristique banale

Maintenant on va étudier les R-représentations de $GL_n(F)$ où F est un corps local non-archimédien de corps résiduel à q éléments et R est un corps algébriquement clos de caractéristique $l \neq p$ banale. On verra que l'on trouve les mêmes paramétrisations que dans la section précédente. On a déjà vu plusieurs propriétés (2.1.12) des représentations en caractéristique banale. Voyons quelques autres.

2.3.1. Lorsque $D = F$, *i.e.* D est un corps commutatif, on a les propriétés suivantes :

R1. Soient $\rho_1, \dots \rho_r$ des représentations cuspidales. Si $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ est réductible, il existe $1 \leq i < j \leq r$ tels que

$$\rho_i = \nu \rho_j \text{ ou } \rho_i = \nu^{-1} \rho_j.$$

Elle est montrée dans [Vi1, §III.1.15]. Cette propriété est vraie même si l est non banal.

R2. Si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations cuspidales de G_{n_1} et G_{n_2}, et $\rho_1 \times \rho_2$ est irréductible, alors

$$\rho_1 \neq \nu \rho_2 \text{ et } \rho_1 \neq \nu^{-1} \rho_2.$$

De plus $\rho \times \nu\rho$ est toujours de longueur 2 indécomposable.

Démonstration de R2. La propriété R2 est vraie si R est de caractéristique 0 d'après [Ze1, 1.11.] Si R est de caractéristique l banale on utilise l'argument suivant :

Soient $\overline{\rho}$ une R-représentation cuspidale de G_r et ρ une représentation cuspidale de G_r dont la réduction modulo l soit $\overline{\rho}$ (elle existe d'après 2.1.10). La représentation $r_{(r,r),2r}(\overline{\rho} \times \nu\overline{\rho})$ est composée, d'après 2.1.8, des représentations irréductibles $\{\overline{\rho} \otimes \nu\overline{\rho}, \nu\overline{\rho} \otimes \overline{\rho}\}$. On a, par [Ze1, 1.11], que $\rho \times \nu\rho$ est de longueur 2, composée de représentations notées ω et ω_0 telles que $r_{(r,r),2r}(\omega) = \rho \otimes \nu\rho$ et $r_{(r,r),2r}(\omega_0) = \nu\rho \otimes \rho$. Par 2.1.10, la longueur de $\overline{\rho} \times \nu\overline{\rho}$ est donc supérieure ou égale à 2. Si, l est banal, elle ne peut pas être strictement supérieure car, dans ce cas, elle contiendrait une représentation cuspidale non supercuspidale, ce qui est absurde puisque l'on est dans le cas banal (*cf.* [Vi1, II.3.9]).

Puisque $\overline{\rho} \otimes \nu\overline{\rho} \neq \nu\overline{\rho} \otimes \overline{\rho}$ (l étant banal) , la représentation $\overline{\rho} \times \nu\overline{\rho}$, par Frobenius (2.1.4(a)), ne peut pas être semi-simple. En effet,

$$\mathrm{Hom}\left(\overline{\rho} \times \nu\overline{\rho}, \overline{\rho} \times \nu\overline{\rho}\right) = \mathrm{Hom}\left(r_{(r,r)2rr}\left(\overline{\rho} \times \nu\overline{\rho}\right), \overline{\rho} \otimes \nu\overline{\rho}\right).$$

Par le lemme géométrique, $r_{(r,r)2r}(\overline{\rho} \times \nu\overline{\rho})$ est composé de $\overline{\rho} \otimes \nu\overline{\rho}$ et $\nu\overline{\rho} \otimes \overline{\rho}$ et donc, puisque ce deux modules sont différents, la dimension de $\mathrm{Hom}(\overline{\rho} \times \nu\overline{\rho}, \nu\overline{\rho} \times \overline{\rho})$ vaut 1, et donc la représentation $\overline{\rho} \times \nu\overline{\rho}$ ne peut pas être semi-simple. □

Pour $\rho \in \mathcal{C}$ posons $\mathrm{Irr}(\rho)$ l'ensemble de toutes les $\pi \in \mathrm{Irr}$ telles que $\mathrm{supp}(\pi) \in \{\nu^n\rho : n \in \mathbb{Z}\}$. Notons aussi

$$f_\rho = \begin{cases} \min\{n > 0 : \rho = \nu^n\rho\} & \text{si } \{n > 0 : \rho = \nu^n\rho\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

(f_ρ est la *longueur* de la ν-orbite de ρ).

R3. Pour toute $\pi \in \mathrm{Irr}(\rho)$, $\mathrm{gr}(\pi) = n$, il existe $0 \leq t < f_\rho$ tel que $\nu^t\rho \notin \mathrm{supp}(\pi)$.

La propriété R3 est élémentaire : on peut trouver une preuve dans [Vi1, §III.5]

2.3.2. Ces propriétés nous permettent d'utiliser les arguments de Zelevinskii et classifier toutes les R-représentations irréductibles de $GL_n(F)$ en termes des représentations cuspidales. Rappelons ces arguments :

Soit $\rho \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\Delta = \left\{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{n-1}\rho\right\}.$$

On appelle Δ un segment et l'ensemble de tous les segments sera noté S.

On dit que $\Delta = \{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{n-1}\rho\}$, $\Delta' = \left\{\rho', \nu\rho', \ldots, \nu^{n'-1}\rho'\right\}$ sont liés si $\Delta \cup \Delta'$ est encore un segment et $\Delta \not\subseteq \Delta'$ et $\Delta' \not\subseteq \Delta$.

La propriété R3 va nous permettre de considérer des segments Δ qui ne contiennent pas la représentation $\rho\nu^t$. Ça nous permet d'ordonner la ν-orbite de ρ, dans le cas où la caractéristique l de R est différente de 0, pour toute représentation cuspidale ρ. Dans ce cas, on définit un ordre sur la ν-orbite de ρ, $\{\rho\nu^{t+i} : i = 1, \ldots, f_\rho\}$, par :

$$\rho\nu^{t+1} < \rho\nu^{t+2} < \cdots < \rho\nu^{t+f_\rho-1} < \rho\nu^{t+f_\rho}.$$

On dit que Δ précède Δ' s'ils sont liés et il existe $\tau \in \Delta$ telle que $\rho' = \tau\nu$. On dit que $\Delta \geq \Delta'$ si

$$\rho > \rho', \text{ ou bien } \rho = \rho' \text{ et } n \geq n',$$

(avec l'ordre naturel si la caractéristique de R est 0 et l'ordre choisi précédemment sinon). Remarquons que cette définition dépend du choix de t et que l'ordre ainsi défini n'est total que si l'on se restreint à des segments inclus dans l'ensemble $\left\{\rho\nu^{t+1}, \ldots, \rho\nu^{t+f_\rho-1}\right\}$ (resp. dans $\{\nu^t\rho : t \in \mathbb{Z}\}$, si la caractéristique de R est 0).

Un *multisegment* est un multi-ensemble de segments de la forme ci-dessus. On dira qu'un multisegment est rangé si l'on identifie le multisegment à l'ensemble indicé $(\Delta_1, \ldots, \Delta_N)$ où

$$\Delta_r \not< \Delta_{r-1} \not< \cdots \not< \Delta_2 \not< \Delta_1.$$

Tout multisegment peut se ranger d'une telle façon. On définit le support d'un multisegment $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ comme

$$\bigcup_{1 \leq i \leq r} \Delta_i.$$

L'ensemble des multi-segments dont le support est inclus dans l'ensemble $\left\{\rho\nu^{t+1}, \ldots, \rho\nu^{t+f_\rho-1}\right\}$ (resp. dans $\{\nu^t\rho : t \in \mathbb{Z}\}$, si la caractéristique de R et 0) est noté $M(S)_\rho$ et est muni d'un ordre total grâce à l'ordre précédent défini sur les segments prolongé lexicographiquement, *i.e.* soient $m = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$, $m' = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'})$ deux multisegments rangés, on a $m \geq m'$ si :

$$\begin{array}{llcl} & \Delta_1 & > & \Delta'_1 \\ \text{ou} & \Delta_1 & = & \Delta'_1 \text{ et } \Delta_2 > \Delta'_2 \\ \text{ou} & & \vdots & \\ \text{ou} & \Delta_1 = \Delta'_1 & \ldots & \Delta_{r'} = \Delta'_{r'}, \text{ et } r \geq r'. \end{array}$$

2.3.3. Ainsi les résultats de [Ze1, §2], sont vrais et donc on a :

Proposition. *Soit ρ une représentation cuspidale de G_p. A chaque segment $\Delta = \{\rho, \nu\rho, \dots, \nu^{n-1}\rho\}$, ρ étant une représentation cuspidale de G_p, on peut associer des représentations irréductibles $\langle\Delta\rangle$ et $\langle\Delta\rangle^t$ telles que*

1. *$\langle\Delta\rangle$ (resp. $\langle\Delta\rangle^t$) est l'unique sous-module (resp. quotient) irréductible de $\rho \times \nu\rho \times \cdots \times \nu^{n-1}\rho$.*
2. *$r_{(p,\dots,p),np}(\langle\Delta\rangle) = \rho \otimes \nu\rho \otimes \cdots \otimes \nu^{n-1}\rho$ (resp. $r_{(p,\dots,p),np}(\langle\Delta\rangle^t) = \nu^{n-1}\rho \otimes \cdots \otimes \nu\rho \otimes \rho$).*

Les représentations $\langle\Delta\rangle$ et $\langle\Delta\rangle^t$ sont aussi caractérisées par la propriété (2).

Si $\Delta = \{\rho, \nu\rho, \dots, \nu^{n-1}\rho\}$ est un segment, on note $\widetilde{\Delta}$ le segment

$$\left\{\nu^{1-n}\widetilde{\rho}, \dots \widetilde{\rho}\right\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\langle\widetilde{\Delta}\right\rangle &= \widetilde{\langle\Delta\rangle}, \\ \left\langle\widetilde{\Delta}\right\rangle^t &= \widetilde{\langle\Delta\rangle^t}. \end{aligned}$$

2.3.4. Les démonstrations des théorèmes 4.2 et 9.7 de [Ze1] utilisent seulement la théorie de dérivées, qui est valable en toute caractéristique $l \neq p$ (*cf.* [Vi1, §III.1]), et les définitions précédentes. Elles sont donc sont vraies pour l banal. Ainsi :

Théorème. 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

   (a) *Pour tous $1 \leq i, j \leq r$, les segments Δ_i et Δ_j ne sont pas liés.*

   (b) *$\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_n\rangle$ est irréductible.*

   (c) *$\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_n\rangle^t$ est irréductible.*

2. *Si Δ précède Δ' alors*

   (a) *$\mathrm{JH}(\langle\Delta\rangle \times \langle\Delta'\rangle) = \{\omega, \omega'\}$ avec $\omega = \langle\Delta^{\cup}\rangle \times \langle\Delta^{\cap}\rangle$ et ω' l'unique sous-module irréductible de $\langle\Delta'\rangle \times \langle\Delta\rangle$.*

   (b) *$\mathrm{JH}\left(\langle\Delta\rangle^t \times \langle\Delta'\rangle^t\right) = \{\omega, \omega'\}$ avec $\omega = \langle\Delta^{\cup}\rangle^t \times \langle\Delta^{\cap}\rangle^t$ et ω' l'unique quotient irréductible de $\langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta\rangle^t$.*

2.3.5. Le lemme suivant est une conséquence du théorème précédent et du lemme 2.1.9.1.

Lemme. *Soit* $\left(\Delta_1^{\rho_1}, \dots, \Delta_{n_{\rho_1}}^{\rho_1}, \Delta_1^{\rho_2}, \dots, \Delta_{n_{\rho_2}}^{\rho_2}, \dots, \Delta_1^{\rho_m}, \dots, \Delta_{n_{\rho_m}}^{\rho_m}\right)$ *un multi-ensemble de segments ordonné tel que pour tout* k, $\Delta_k^{\rho_i}$ *finisse par* ρ_i *et* $\rho_j \not< \rho_i$ *et* $\rho_j \neq \rho_i$ *si* $j < i$. *Alors*

$$\pi^* = \langle\Delta_1^{\rho_1}\rangle \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_1}}^{\rho_1} \right\rangle \otimes \langle\Delta_1^{\rho_2}\rangle \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_2}}^{\rho_2} \right\rangle \otimes \dots \otimes \langle\Delta_1^{\rho_m}\rangle \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_m}}^{\rho_m} \right\rangle$$

(resp. $\pi^{*t} =$

$$\langle\Delta_1^{\rho_1}\rangle^t \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_1}}^{\rho_1} \right\rangle^t \otimes \langle\Delta_1^{\rho_2}\rangle^t \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_2}}^{\rho_2} \right\rangle^t \otimes \dots \otimes \langle\Delta_1^{\rho_m}\rangle^t \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_m}}^{\rho_m} \right\rangle^t)$$

apparaît avec multiplicité 1 *dans* $\mathrm{JH}\left(r(\pi)\right), \pi = \langle\Delta_1^{\rho_1}\rangle \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_m}}^{\rho_m} \right\rangle$ *(resp.* $\mathrm{JH}\left(\overline{r}(\pi^t)\right), \pi^t = \langle\Delta_1^{\rho_1}\rangle^t \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_m}}^{\rho_m} \right\rangle^t$*), où* r *est le foncteur de Jacquet associé à la partition* $(n_1, \dots, n_m)$, *avec* $n_i = \sum_{1 \le j \le n_{\rho_j}} \dim\left(\Delta_{n_{\rho_1}}^{\rho_1}\right)$ *.*

Démonstration. Les représentations $\langle\Delta_1^{\rho_i}\rangle \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_i}}^{\rho_i} \right\rangle$ et $\langle\Delta_j^{\rho_1}\rangle \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_j}}^{\rho_j} \right\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1^{\rho_i}\rangle^t \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_i}}^{\rho_i} \right\rangle^t$ et $\langle\Delta_j^{\rho_1}\rangle^t \times \dots \times \left\langle \Delta_{n_{\rho_j}}^{\rho_j} \right\rangle^t$) sont irréductibles par 2.3.4 et, par construction et le lemme géométrique, satisfont aux hypothèses du lemme 2.1.9.1, ce qui implique le lemme. □

2.3.6. Les théorèmes ci-dessous, similaires au théorème 2.2.5, classifient toutes les représentations irréductibles de G_n en fonction des représentations cuspidales de G_i, $i \le n$.

Théorème.

1. *Soient* $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ *des segments. Supposons que, si* $i < j$, Δ_i *ne précède pas* Δ_j. *Alors la représentation* $\langle\Delta_1\rangle \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle$ *admet une unique sous-représentation irréductible. On la note* $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$. *La multiplicité de* $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$ *dans* $\mathrm{JH}\left(\langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta_2\rangle \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle\right)$ *est égale à* 1.
2. *Les représentations* $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$ *et* $\langle\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'}\rangle$ *sont équivalentes si, et seulement si, les suites* $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ *et* $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$ *sont égales à l'ordre près.*
3. *Toute représentation irréductible de* G_n *est de la forme* $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$.

De même, on trouve un théorème similaire quand on change le mot "sous-représentation" par "quotient" :

Théorème.

1. *Soient* $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ *des segments. Supposons que, si* $i < j$, Δ_i *ne précède pas* Δ_j. *Alors la représentation* $\langle\Delta_1\rangle^t \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle^t$ *admet un unique quotient irréductible. On le note* $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$. *La multiplicité de* $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$ *dans* $\mathrm{JH}\left(\langle\Delta_1\rangle^t \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle^t\right)$ *est égale à* 1.

2. *Les représentations* $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle^t$ *et* $\langle \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'} \rangle^t$ *sont équivalentes si, et seulement si, les suites* $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ *et* $(\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'})$ *sont égales à l'ordre près.*
3. *Toute représentation irréductible de* G_n *est de la forme* $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle^t$.

On dira que les représentations écrites sous la forme $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle$ sont paramétrées *à la Zelevinskii* et les représentations $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_r \rangle^t$ *à la Langlands.*

Démonstration. La démonstration de [Ze1, §6] marche très bien pour des représentations *à la Zelevinskii* sur un corps de caractéristique banale. Ici on donne une nouvelle démonstration purement combinatoire qui marche pour les deux classifications.

1. D'après 2.3.4 on peut supposer que le multiensemble $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\}$ est ordonné comme dans le lemme 2.3.5. La partie 1 est donc une conséquence de ce lemme et du lemme 2.1.9.3.
2. Soient $m = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_r\}$, $m' = \{\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r'}\}$ deux multi-segments,
   On pose $m = m_1 + \cdots + m_t$ et $m' = m'_1 + \cdots + m'_t$ où $m_i, m'_i \in M(S)_{\rho_i}$ sont des multisegments (éventuellement vides) et $\{\rho_i\}_{i=1,\ldots,t}$ est un ensemble fini de représentations cuspidales tel que, pour tout $i \neq j$ $\rho_i \notin \mathrm{Irr}(\rho_j)$.
   Le raisonnement qui suit, par récurrence sur t, nous permet de nous ramener au cas où $t = 1$. On va supposer que $\langle m' \rangle = \langle m \rangle$ (resp. $\langle m' \rangle^t = \langle m \rangle^t$) et on va montrer qu'alors $m = m'$.
   Notons
$$\begin{aligned} m_1 &= \left\{\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_{r_1}^{(1)}\right\}, \\ m'_1 &= \left\{\Delta_1^{\prime(1)}, \ldots, \Delta_{r'_1}^{\prime(1)}\right\}. \end{aligned}$$
   supposés rangés, avec
$$\begin{aligned} \Delta_k^{(1)} &= \left\{\rho_1^{(k)}, \ldots, \rho_{t_k}^{(k)}\right\}, \qquad 1 \leq k \leq r_1 \\ \Delta_k^{\prime(1)} &= \left\{\rho_1^{\prime(k)}, \ldots, \rho_{t'_k}^{\prime(k)}\right\} \qquad 1 \leq k \leq r'_1. \end{aligned}$$
   On note aussi : $\pi(m_1) = \left\langle \Delta_1^{(1)} \right\rangle \times \cdots \times \left\langle \Delta_{r_1}^{(1)} \right\rangle$, $\pi^t(m_1) = \left\langle \Delta_1^{(1)} \right\rangle^t \times \cdots \times \left\langle \Delta_{r_1}^{(1)} \right\rangle^t$.
   D'abord, $\mathrm{supp}(m) = \mathrm{supp}(m')$ et donc $\mathrm{supp}(m_1) = \mathrm{supp}(m'_1)$. Supposons $m_1 > m'_1$ (dans $M(S)_{\rho_1}$ l'ordre $>$ est total).

On note r (resp. $\overline{r}$) le foncteur de Jacquet (resp. foncteur de Jacquet oposśé) associé à la partition $(p, \dots, p)$, où $p = \mathrm{gr}(\rho_1)$. On a, d'après la partie 1, que la représentation

$$\tau = \rho_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes \rho_{t_1}^{(1)} \otimes \rho_1^{(2)} \otimes \cdots \otimes \rho_{t_2}^{(2)} \otimes \cdots \otimes \rho_1^{(r_1)} \otimes \cdots \otimes \rho_{t_{r_1}}^{(r_1)}$$

appartient à $\mathrm{JH}\left(r\left(\langle m_1 \rangle\right)\right)$ (resp. $\mathrm{JH}\left(\overline{r}\left(\langle m_1 \rangle^t\right)\right)$).

Puisque $m > m'$, cette représentation, par le lemme géométrique comme dans [Ze1, 6.9.] (*cf.* 2.3.7 ci dessous), n'appartient pas à $\mathrm{JH}\left(r\left(\pi\left(m'_1\right)\right)\right)$ (resp. $\mathrm{JH}\left(\overline{r}\left(\pi^t\left(m'_1\right)\right)\right)$). Ainsi,

$$\begin{array}{rcc} & \mathrm{Jac}_\tau\left(\langle m \rangle\right) \neq \emptyset & \mathrm{Jac}_\tau\left(\pi(m')\right) = \emptyset \\ (\text{resp.} & \overline{\mathrm{Jac}}_\tau\left(\langle m \rangle^t\right) \neq \emptyset & \overline{\mathrm{Jac}}_\tau\left(\pi^t(m')\right) = \emptyset\ ), \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcc} & \mathrm{Jac}_\tau\left(\langle m \rangle\right) \neq \emptyset & \mathrm{Jac}_\tau\left(\langle m' \rangle\right) = \emptyset \\ (\text{resp.} & \overline{\mathrm{Jac}}_\tau\left(\langle m \rangle^t\right) \neq \emptyset & \overline{\mathrm{Jac}}_\tau\left(\langle m' \rangle\right) = \emptyset\ ), \end{array}$$

et donc $\langle m' \rangle \neq \langle m \rangle$ (resp. $\langle m' \rangle^t \neq \langle m \rangle^t$).

3. La démonstration de [Ze1, 6.7.] marche aussi bien pour les représentations *à la Zelevinskii* que pour celles *à la Langlands*. On récrit ici la preuve pour ces dernières.

   Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$. Considérons l'ensemble $\overrightarrow{O}(\pi)$ des séquences ordonnées $\overrightarrow{a} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ de segments tels que π soit un quotient de $\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$. L'ensemble $\overrightarrow{O}(\pi)$ est non vide et fini par 2.1.6. On appelle une inversion de $\overrightarrow{a} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$ une paire d'indices (i, j) tels que $i < j$ et Δ_i précède Δ_j. On va prouver qu'il existe un élément $\overrightarrow{a} \in \overrightarrow{O}(\pi)$ avec aucune inversion.

   Supposons que $\overrightarrow{a}$ ait des inversions. Par le théorème 2.3.4.1, on peut bien supposer que cette inversion soit de la forme $(i, i+1)$, *i.e.* Δ_i précède Δ_{i+1}.

   D'après 2.3.4.2, l'induite $\langle \Delta_i \rangle^t \times \langle \Delta_{i+1} \rangle^t$ est composée de la représentation $\langle \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \rangle^t \times \langle \Delta_i \cup \Delta_{i+1} \rangle^t$ et d'un quotient irréducitble de $\langle \Delta_{i+1} \rangle^t \times \langle \Delta_i \rangle^t$. Ainsi :

   (a) ou bien π est un quotient de $\sigma_0 = \langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_{i+1} \rangle^t \times \langle \Delta_i \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$,

   (b) ou bien π est un quotient de $\sigma_1 = \langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \rangle^t \times \langle \Delta_i \cup \Delta_{i+1} \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$,

   et σ_0 et σ_1, par [Ze1, Lemma.6.7.], ont moins d'inversions que $\overrightarrow{a}$.

□

2.3.7. Pour toute représentation π, notons $\Omega(\pi)$ (resp. $\Omega^t(\pi)$) l'ensemble des suites $(\rho_1, \dots, \rho_s)$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telles que $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_s \in \mathrm{JH}\left(r_{(m_1,\dots,m_s),n}(\pi)\right)$ (resp. $\mathrm{JH}\left(\overline{r}_{(m_1,\dots,m_s),n}(\pi)\right)$) avec $(m_1, \dots, m_s)$ une partition de n et $\mathrm{gr}(\rho_i) = m_i$. Ordonnons cet ensemble lexicographiquement.

Si $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ est un multi-segment rangé, $\Delta_i = \left\{\rho^{(i)}, \dots, \nu^{n_i-1}\rho^{(i)}\right\}$, alors la représentation

$$\rho^{(1)} \otimes \cdots \otimes \nu^{n_1-1}\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)} \otimes \cdots \otimes \nu^{n_2-1}\rho^{(2)} \otimes \cdots \otimes \rho^{(r)} \cdots \otimes \nu^{n_r-1}\rho^{(r)} \quad \text{(a)}$$

appartient à $\Omega\left(\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle\right)$ (resp. $\Omega^t\left(\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t\right)$). En effet, la représentation $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$) étant un sous-module (resp. quotient) irréductible de $\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t$), on a $\langle\Delta_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\Delta_r\rangle \in r_{(m_1,\dots,m_s),n}\left(\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle\right)$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \otimes \cdots \otimes \langle\Delta_r\rangle^t \in \overline{r}_{(m_1,\dots,m_s),n}\left(\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t\right)$).

En fait, on peut caractériser $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$) comme la représentation telle que la représentation (a) appartient à $\Omega\left(\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle\right)$ (resp. $\Omega^t\left(\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t\right)$) et tous les éléments de $\Omega\left(\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle\right)$ (resp. $\Omega^t\left(\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t\right)$) ne sont plus grands que (a).

Remarque 2.3.7.1. Ainsi $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$) est aussi le seul quotient (resp. sous-module) irréductible de $\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle$ (resp.$\langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t$).

2.3.8. Si $a = (\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ est un multi-segment, on pose $\widetilde{a} = \left(\widetilde{\Delta_1}, \dots, \widetilde{\Delta_r}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle\widetilde{a}\rangle &= \widetilde{\langle a\rangle}, \\ \langle\widetilde{a}\rangle^t &= \widetilde{\langle a\rangle^t}. \end{aligned}$$

En effet, d'après la remarque précédente, on a :

$$\begin{aligned} \langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle &\twoheadrightarrow \langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle \hookrightarrow \langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle \\ \langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t &\twoheadrightarrow \langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle \hookrightarrow \langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t. \end{aligned}$$

Par passage à la contragrédiente on trouve

$$\begin{aligned} \left\langle\widetilde{\Delta}_1\right\rangle \times \cdots \times \left\langle\widetilde{\Delta}_r\right\rangle &\twoheadrightarrow \left\langle\widetilde{\Delta}_1, \dots, \widetilde{\Delta}_r\right\rangle \hookrightarrow \left\langle\widetilde{\Delta}_r\right\rangle \times \cdots \times \left\langle\widetilde{\Delta}_1\right\rangle \\ \left\langle\widetilde{\Delta}_r\right\rangle^t \times \cdots \times \left\langle\widetilde{\Delta}_1\right\rangle^t &\twoheadrightarrow \left\langle\widetilde{\Delta}_1, \dots, \widetilde{\Delta}_r\right\rangle \hookrightarrow \left\langle\widetilde{\Delta}_1\right\rangle^t \times \cdots \times \left\langle\widetilde{\Delta}_r\right\rangle^t. \end{aligned}$$

Par 2.3.3 le multi-segment $\left(\widetilde{\Delta}_r, \dots, \widetilde{\Delta}_1\right)$ est rangé comme dans 2.3.6. L'unicité dans ce théorème implique l'assertion.

Proposition. *Soient $a_1, \dots, a_r$ des multi-segments et supposons que, si $i \neq j$, aucun segment Δ de a_i ne soit lié à un segment Δ' de a_j. Alors (cf. 2.1.11)*

$$\langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_r \rangle = \langle a_1 + \cdots + a_r \rangle ,$$

$$\langle a_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle a_r \rangle^t = \langle a_1 + \cdots + a_r \rangle^t .$$

Démonstration. Par récurrence on se ramène immédiatement au cas où $r = 2$. Soient $a_1 = (\Delta_1, \dots, \Delta_r), a_2 = (\Delta'_1, \dots, \Delta'_s) \in M(S)$. Alors, puisqu'aucun segment Δ de a_1 n'est pas lié à un segment Δ' de a_2, les représentations

$$\begin{aligned} \pi(a_1) \times \pi(a_2) &= \langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle \times \langle \Delta'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta'_s \rangle \\ \pi^t(a_1) \times \pi^t(a_2) &= \langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t \times \langle \Delta'_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta'_s \rangle^t \end{aligned}$$

sont isomorphes, respectivement à

$$\begin{aligned} &\langle \Delta''_1 \rangle \quad \times \cdots \times \left\langle \Delta''_{r+s} \right\rangle , \\ &\langle \Delta''_1 \rangle^t \quad \times \cdots \times \left\langle \Delta''_{r+s} \right\rangle^t , \end{aligned}$$

où $\left(\Delta''_1, \dots, \Delta''_{r+s}\right)$ est un réarrangement de $a_1 + a_2$ tel que, si $i < j$, Δ''_i ne précède pas Δ''_j.

Ainsi $\pi(a_1) \times \pi(a_2)$ (resp. $\pi^t(a_1) \times \pi^t(a_2)$) a un unique sous-module (resp. quotient) irréductible isomorphe à $\langle a_1 + a_2 \rangle$ (resp. $\langle a_1 + a_2 \rangle^t$). De même, $\pi(\widetilde{a_1}) \times \pi(\widetilde{a_2})$ (resp. $\pi^t(\widetilde{a_1}) \times \pi^t(\widetilde{a_2})$) a un unique sous-module (resp. quotient) irréductible isomorphe à $\left\langle \widetilde{a_1 + a_2} \right\rangle$ (resp. $\left\langle \widetilde{a_1 + a_2} \right\rangle^t$), et donc, par passage à la contragrédiente, $\pi(a_1) \times \pi(a_2)$ (resp. $\pi^t(a_1) \times \pi^t(a_2)$) a un unique quotient (resp. sous-module) irréductible isomorphe à $\langle a_1 + a_2 \rangle$ (resp. $\langle a_1 + a_2 \rangle^t$).

Or, d'après 2.3.6, $\langle a_1 + a_2 \rangle$ (resp. $\langle a_1 + a_2 \rangle^t$) apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{JH}\,(\pi(a_1) \times \pi(a_2))$ (resp. $\mathrm{JH}\,(\pi^t(a_1) \times \pi^t(a_2))$) et donc

$$\begin{aligned} \pi(a_1) \times \pi(a_2) &= \langle a_1 + a_2 \rangle , \\ \pi^t(a_1) \times \pi^t(a_2) &= \langle a_1 + a_2 \rangle^t . \end{aligned}$$

□

2.3.9. On aura besoin aussi de savoir quand une représentation irréductible est sous-quotient d'une représentation induite, comme dans 2.2.6.3.

Proposition. *Pour qu'une représentation $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_s \rangle$ (resp. $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_s \rangle^t$) soit isomorphe à un sous-quotient irréductible de $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$ (resp. $\langle \Delta_1 \rangle^t \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle^t$), il faut et il suffit que le multisegment $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_s)$ se déduise de $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ par une suite d'"opérations élémentaires" consistant à remplacer deux segments liés Δ et Δ' par $\Delta \cup \Delta'$ et $\Delta \cap \Delta'$.*

Démonstration. La preuve sera faite en 2.3.11 □

2.3.10. Soit X un sous-ensemble maximal de $\mathcal{C}$ vérifiant la propriété suivante : si $\rho_1, \rho_2 \in X$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\rho_1 = \nu^n \rho_2$ et $n < f_{\rho_1}$ alors $n = 0$. Notons $\mathcal{R}(\rho)$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}$ formé des représentations dont le support est inclus dans l'ensemble $\left\{\rho\nu_\rho^t : t \in \mathbb{Z}\right\}$. On a $\mathrm{Irr}(\rho) = \mathcal{R}(\rho) \cap \mathrm{Irr}$.

La proposition précédente implique, comme dans [Ze1, 7.5], que

Corollaire. *1.* $\mathcal{R} = \bigotimes_{\rho \in X} \mathcal{R}(\rho)$

2. L'algèbre $\mathcal{R}$ est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Z}$ en les indéterminées $\langle\Delta\rangle$ (resp. $\langle\Delta\rangle^t$) où Δ décrit l'ensemble des segments.

La flèche $\langle\Delta\rangle \mapsto \langle\Delta\rangle^t$ s'étend de façon unique, en un endomorphisme involutif, que l'on appellera l'involution de Zelevinskii, $\pi \mapsto \tau(\pi)$ de l'algèbre $\mathcal{R}$.

2.3.11. Ce paragraphe est consacré à la preuve de 2.3.9 : La démonstration de [Ze1, §7] marche très bien pour des représentations *à la Zelevinskii* sur un corps de caractéristique banale. Ici on donne une démonstration qui est valable pour les deux classifications qui n'est autre qu'une adaptation de la preuve de [Tad, Theorem 5.3].

L'implication : *si le multisegment $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_s)$ se déduit de $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ par une suite d'opérations élémentaires, alors la représentation $\langle\Delta'_1, \dots, \Delta'_s\rangle$ (resp. $\langle\Delta'_1, \dots, \Delta'_s\rangle^t$) est isomorphe à un sous-quotient irréductible de $\langle\Delta_1\rangle \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle^t$)* se montre (*cf.* [Ze1, 7.1]), par récurrence sur le nombre d'"opérations élémentaires", en utilisant le théorème 2.3.4.

Prouvons l'autre implication. Pour simplifier les notations, on introduit un nouvel ordre partiel (*cf.* [Ze1, 7.1]) sur $M(S)$ (à ne pas confondre avec le précédent) que l'on utilisera seulement dans ce paragraphe. On dira que $b < a$ si b se déduit de a par une suite non vide d'"opérations élémentaires".

On introduit certains opérateurs d'entrelacement.

Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments. Supposons que, si $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j. Alors, d'après 2.3.6.1 la représentation $\langle\Delta_1\rangle \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle^t$) admet une unique sous-représentation (resp. quotient) irréductible, notée $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$). Par 2.3.7.1, on sait que $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle^t$) est l'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de $\langle\Delta_1\rangle \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle^t$).

On définit les opérateurs J et J^t par :

$$\begin{aligned} J &: \langle\Delta_r\rangle \times \dots \times \langle\Delta_1\rangle \longrightarrow \langle\Delta_1\rangle \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle, \\ J^t &: \langle\Delta_1\rangle^t \times \dots \times \langle\Delta_r\rangle^t \longrightarrow \langle\Delta_r\rangle^t \times \dots \times \langle\Delta_1\rangle^t, \end{aligned}$$

où J (resp. J^t) est la projection de $\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t$) vers $\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle$ (resp.$\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle^t$) composée avec l'inclusion vers $\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t$).

Lemme 2.3.11.1. *Soit* $\psi : \langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle \longrightarrow \langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$ *(resp.* $\psi^t : \langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t \longrightarrow \langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t$*) un entrelacement non trivial. Alors* $\mathrm{im}(\psi) = \mathrm{im}(J)$ *et* $\ker(\psi) = \ker(J)$ *(resp.* $\mathrm{im}(\psi^t) = \mathrm{im}(J^t)$ *et* $\ker(\psi^t) = \ker(J^t)$*) dans* $\mathcal{R}$.

Démonstration. $\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle$ (resp. $\langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t$) a un unique quotient qui est $\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle$ (resp.$\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle^t$). Si $\mathrm{im}(\psi)$ (resp. $\mathrm{im}(\psi^t)$) n'était pas irréductible, puisque $\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle$ (resp.$\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle^t$) est l'unique sous-module irréductible de $\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t$), la multiplicité de $\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle$ (resp.$\langle\Delta_1, \ldots, \Delta_r\rangle^t$) dans $\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t$) serait au moins 2, ce qui est absurde. D'où $\mathrm{im}(\psi) = \mathrm{im}(J)$ (resp. $\mathrm{im}(\psi^t) = \mathrm{im}(J^t)$). On a donc que

$$\begin{aligned}
(\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle) / \ker(\psi) &= (\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle) / \ker(J) \\
\left(\langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t\right) / \ker(\psi^t) &= \left(\langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t\right) / \ker(J^t).
\end{aligned}$$

D'où $\ker(\psi) = \ker(J)$ (resp. $\ker(\psi^t) = \ker(J^t)$) dans $\mathcal{R}$. □

Soient Δ_1, Δ_2 deux segments tels que Δ_1 ne précède pas Δ_2. On note J_{Δ_1,Δ_2} (resp. $J^t_{\Delta_1,\Delta_2}$) l'opérateur défini précédemment

$$\begin{aligned}
J_{\Delta_1,\Delta_2} &: \langle\Delta_2\rangle \times \langle\Delta_1\rangle \longrightarrow \langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta_2\rangle \\
J^t_{\Delta_1,\Delta_2} &: \langle\Delta_1\rangle^t \times \langle\Delta_2\rangle^t \longrightarrow \langle\Delta_2\rangle^t \times \langle\Delta_1\rangle^t.
\end{aligned}$$

Si Δ_1, Δ_2 sont liés alors

$$\begin{aligned}
\ker\left(J_{\Delta_1,\Delta_2}\right) &= \langle\Delta_1 \cup \Delta_2\rangle \times \langle\Delta_1 \cap \Delta_2\rangle \\
\ker\left(J^t_{\Delta_1,\Delta_2}\right) &= \langle\Delta_1 \cup \Delta_2\rangle^t \times \langle\Delta_1 \cap \Delta_2\rangle^t.
\end{aligned}$$

Sinon $\ker\left(J_{\Delta_1,\Delta_2}\right) = 0$ et $\ker\left(J^t_{\Delta_1,\Delta_2}\right) = 0$.

On définit $\psi : \langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle \longrightarrow \langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$ (resp. $\psi^t : \langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t \longrightarrow \langle\Delta_r\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t$) comme la composée

$$\begin{aligned}
&\langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_2\rangle \times \langle\Delta_1\rangle \xrightarrow{1\times\cdots\times 1\times J_{\Delta_1,\Delta_2}} \langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta_2\rangle \\
&\xrightarrow{1\times\cdots\times J_{\Delta_1,\Delta_3}\times 1} \langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta_3\rangle \times \langle\Delta_2\rangle \to \ldots \\
&\to \langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_3\rangle \times \langle\Delta_2\rangle \to \langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta_r\rangle \times \cdots \times \\
&\cdots \times \langle\Delta_2\rangle \times \langle\Delta_3\rangle \to \cdots \to \langle\Delta_1\rangle \times \langle\Delta_2\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle
\end{aligned} \tag{a}$$

(resp.

$$\begin{aligned}
&\langle\Delta_1\rangle^t \times \langle\Delta_2\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t \xrightarrow{J^t_{\Delta_1,\Delta_2} 1\times\cdots\times 1} \langle\Delta_2\rangle^t \times \langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t \\
&\xrightarrow{1\times J^t_{\Delta_1,\Delta_3}\times\cdots\times 1} \langle\Delta_2\rangle^t \times \langle\Delta_3\rangle^t \times \langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t \to \dots \\
&\to \langle\Delta_2\rangle^t \times \langle\Delta_3\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t \times \langle\Delta_1\rangle^t \to \langle\Delta_3\rangle^t \times \langle\Delta_2\rangle^t \times \cdots \times \\
&\cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t \times \langle\Delta_1\rangle^t \to \cdots \to \langle\Delta_r\rangle^t \times \langle\Delta_{r-1}\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_1\rangle^t). \qquad \text{(b)}
\end{aligned}$$

Puisque le foncteur induction est exact on a

$$\begin{aligned}
\ker(1\times\cdots\times 1\times J_{\Delta_1,\Delta_2}) &= 1\times\cdots\times 1\times \ker(J_{\Delta_1,\Delta_2}) \\
\ker\left(J^t_{\Delta_1,\Delta_2}\times 1\cdots\times 1\right) &= \ker\left(J^t_{\Delta_1,\Delta_2}\right)\times 1\cdots\times 1,
\end{aligned}$$

et donc, si π est un sous-quotient irréductible de $\ker(\psi)$ (resp. de $\ker(\psi^t)$), il existe deux segments Δ_i, Δ_j liés tels que π soit un sous-quotient de

$$\langle\Delta_1\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_{i-1}\rangle\times\langle\Delta_i\cup\Delta_j\rangle\times\langle\Delta_{i+1}\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_i\cap\Delta_j\rangle\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle$$

$$\begin{aligned}
\text{(resp. } \langle\Delta_1\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_{i-1}\rangle^t &\times \langle\Delta_i\cup\Delta_j\rangle^t\times\langle\Delta_{i+1}\rangle^t \\
&\times \cdots\times\langle\Delta_i\cap\Delta_j\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_r\rangle^t).
\end{aligned}$$

Ainsi, si π est un sous-quotient irréductible de $\ker(\psi)$ (resp. de $\ker(\psi^t)$) de la forme $\pi = \langle\Delta'_1,\dots,\Delta'_{r'}\rangle$ (resp. $\pi = \langle\Delta'_1,\dots,\Delta'_{r'}\rangle^t$) on a $\{\Delta'_1,\dots,\Delta'_{r'}\} < \{\Delta_1,\dots,\Delta_r\}$ et donc $\psi \neq 0$ (resp. $\psi^t \neq 0$) puisque $\pi = \langle\Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle \notin \ker(\psi)$ (resp. $\pi = \langle\Delta_1,\dots,\Delta_r\rangle^t \notin \ker(\psi^t)$).

Lemme 2.3.11.2. *Soit $a \in M(S)$. Supposons que $\rho \in \mathrm{Irr}$ est un sous-quotient de $\pi(a)$ (resp. $\pi^t(a)$) différent de $\langle a\rangle$ (resp. $\langle a\rangle^t$). Alors il existe $a' \in M(S)$, $a' < a$ tel que ρ soit un sous-quotient de $\pi(a')$ (resp. $\pi^t(a')$).*

Démonstration. Une telle représentation ρ, d'après le lemme 2.3.11.1, vérifirait $\rho \in \ker(\psi)$ (resp. de $\rho \in \ker(\psi^t)$) et donc, par ce qui précède, il existe $a' \in M(S)$, $a' < a$ tel que ρ soit un sous-quotient de $\pi(a')$ (resp. $\pi^t(a')$). $\square$

Ce lemme permet de finir la preuve de 2.3.9 par récurrence. En effet, si a est minimal en $M(S)$ (avec l'ordre qu'on a définit dans ce paragraphe), on a $\langle a\rangle = \pi(a)$ (resp. $\langle a\rangle^t = \pi^t(a)$). Ainsi si $\langle b\rangle$ (resp. $\langle b\rangle^t$) est un sous-quotient de $\pi(a)$ (resp. $\pi^t(a)$) on a $a = b$.

Supposons donc, a non minimal et la proposition montrée pour tout $a' < a$. Soit $\langle b\rangle$ (resp. $\langle b\rangle^t$) un sous-quotient de $\pi(a)$ (resp. $\pi^t(a)$). Si $\langle b\rangle = \langle a\rangle$ (resp. $\langle b\rangle^t = \langle a\rangle^t$) alors, par 2.3.6, $a = b$. Supposons alors $\langle b\rangle \neq \langle a\rangle$ (resp. $\langle b\rangle^t \neq \langle a\rangle^t$). Par le lemme 2.3.11.2, il existe $a' < a$ tel que $\langle b\rangle$ (resp. $\langle b\rangle^t$) soit un sous-quotient de $\pi(a')$ (resp. $\pi^t(a')$). Par hypothèse de récurrence on trouve alors $b \leq a' < a$.

2.3.12. *Réduction modulo l.* Le but de ce paragraphe est de regarder, pour toute représentation irréductible π de G_n sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$, l-entière, sa réduction (cf. 2.1.10) modulo l notée $\overline{\pi}$. De même, on aimerait bien savoir si toute représentation irréductible $\overline{\pi}$ sur $\overline{\mathbb{F}_l}$ se relève. On rappelle qu'on note Λ l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}_l}$.

On va relever les ν-orbites de toute représentation cuspidale $\overline{\rho}$ de G_p sur $\overline{\mathbb{F}_l}$ de la façon suivante :

On rappelle que la propriété R3 affirme que, dans le cas banal, il existe toujours un entier t tel que la représentation $\overline{\rho}\nu^t$ n'appartient pas à supp $(\overline{\pi})$ et ça nous permettait d'ordonner la ν-orbite de $\overline{\rho}$, $\{\overline{\rho}\nu^{t+1}, \overline{\rho}\nu^{t+2}, \ldots, \overline{\rho}\nu^{t-1}, \overline{\rho}\nu^t\}$, par

$$\overline{\rho}\nu^{t+1} < \overline{\rho}\nu^{t+2} < \cdots < \overline{\rho}\nu^{t-1} < \overline{\rho}\nu^t.$$

On relève maintenant $\overline{\rho}\nu^t$ en une représentation cuspidale (*cf.* [Vi3, 3.4.]) $\rho\nu^t$, et pour $i = t+1, t+2, \ldots, t-1$ on relève maintenant $\overline{\rho}\nu^i$ en $\rho\nu^i$. Si $\overline{\Delta} = \{\overline{\rho}_1, \ldots, \overline{\rho}_r\}$ est un segment on note $\Delta = \{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$; puisque la réduction modulo l commute bien avec le foncteur de Jacquet (2.1.10), il est clair que la réduction modulo l de $\langle\Delta\rangle$ (resp. $\langle\Delta\rangle^t$) est irréductible est égale à $\langle\overline{\Delta}\rangle$ (resp. $\langle\overline{\Delta}\rangle^t$). En effet, on a $r_{(p,\ldots,p),rp}\left(r_l\left(\langle\Delta\rangle\right)\right) = \overline{\rho} \otimes \nu\overline{\rho} \otimes \cdots \otimes \nu^{n-1}\overline{\rho}$ (resp. $r_{(p,\ldots,p),rp}\left(r_l\left(\langle\Delta\rangle^t\right)\right) = \nu^{n-1}\overline{\rho} \otimes \cdots \otimes \nu\overline{\rho} \otimes \overline{\rho}$).

On a relevé la ν-orbite de ρ pour pouvoir affirmer que

$$\Delta \text{ précède } \Delta' \Leftrightarrow \overline{\Delta} \text{ précède } \overline{\Delta'}. \tag{a}$$

Nous pensons que cette propriété peut nous permettre de trouver un relèvement de $\overline{\pi}$ l-irréductible. Pourtant, on ne peut affirmer que la proposition suivante :

Soit $\overline{a} \in M(S)$, $\overline{a} = \left(\overline{\Delta}_1, \ldots, \overline{\Delta}_r\right)$ et posons a le multisegment $(\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$.

Proposition. *La représentation $\langle\overline{a}\rangle$ (resp. $\langle\overline{a}\rangle^t$) est un sous-quotient de $r_l\left(\langle a\rangle\right)$ (resp. $r_l\left(\langle a\rangle^t\right)$ pour tout $\overline{a} \in M(S)$;*

Démonstration. Soient L_i (resp. L_i^t) des réseaux des $\langle\Delta_i\rangle$ (resp. $\langle\Delta_i\rangle^t$). Notons L (resp. L^t) le réseau $\langle a\rangle \cap (L_1 \times \cdots \times L_r)$ (resp. $\langle a\rangle^t \cap (L_1^t \times \cdots \times L_r^t)$) de $\langle a\rangle$ (resp. $\langle a\rangle^t$).

Alors l'inclusion (resp. le quotient)

$$\begin{array}{ll} \langle a\rangle & \hookrightarrow \langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle \\ (\text{resp.} & \langle\Delta_1\rangle^t \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle^t \twoheadrightarrow \langle a\rangle^t \ ) \end{array}$$

induit une inlcusion (resp. quotient)

$$\begin{array}{ll} L/\Lambda L & \hookrightarrow \left(L_1 \times \cdots \times L_r\right)/\Lambda\left(L_1 \times \cdots \times L_r\right) \\ (\text{resp.} & \left(L_1^t \times \cdots \times L_r^t\right)/\Lambda\left(L_1^t \times \cdots \times L_r^t\right) \twoheadrightarrow L^t/\Lambda L^t \ ), \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{ll} L/\Lambda L & \hookrightarrow \left\langle \overline{\Delta}_1 \right\rangle \times \cdots \times \left\langle \overline{\Delta}_r \right\rangle \\ (\text{resp.} & \left\langle \overline{\Delta}_1 \right\rangle^t \times \cdots \times \left\langle \overline{\Delta}_r \right\rangle^t \twoheadrightarrow L^t/\Lambda L^t \ ). \end{array}$$

Puisque $\langle \overline{a} \rangle$ (resp. $\langle \overline{a} \rangle^t$) est l'unique sous-module (resp. quotient) irréductible de $\left\langle \overline{\Delta}_1 \right\rangle \times \cdots \times \left\langle \overline{\Delta}_r \right\rangle$ (resp. $\left\langle \overline{\Delta}_1 \right\rangle^t \times \cdots \times \left\langle \overline{\Delta}_r \right\rangle^t$) on a que $\langle \overline{a} \rangle$ (resp. $\langle \overline{a} \rangle^t$) est un sous-quotient de $L/\Lambda L$ (resp. $L^t/\Lambda L^t$) d'où la proposition. $\square$

En général la réduction modulo l de $\langle a \rangle$ n'est pas irréductible. En effet, pour tout $l > 0$ il existe toujours une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible qui se réduit en une représentation réductible. Par exemple, si $q^e \equiv 1 \mod l$ et $e > 1$ alors la réduction de la représentation irréductible $1 \times \nu^{e+1}$ est $1 \times \nu$ qui -elle- est bien réductible.

2.4 Quelques remarques

2.4.1. *Paramétrisation de Zelevinskii des représentations de $GL_r(D)$.* Toutes les preuves et remarques du chapitre précédent, à partir du théorème 2.3.4 sont vraies pour les représentations complexes de $GL_r(D)$. En effet, le théorème 2.3.4 est vrai pour de telles représentations par 2.2.4, 2.2.7 et [Au1], où l'auteur montre que l'involution de Zelevinskii envoie toute représentation irréductible en une représentation irréductible. Le reste du chapitre, étant de nature purement combinatoire, reste donc aussi valable. Ainsi on a de même, dans ce cas, une paramétrisation de Zelevinskii.

On peut maintenant aussi comprendre les raisons pour lesquelles l'article [Ba2] suffit pour étendre tous les résultats de [Tad], quand D est de caractéristique positive.

Dans [Ba2], on démontre que l'induite d'une représentation de carré intégrable est irréductible et dans [Ba, 2.3], on affirme que toute toute représentation de carré intégrable est une représentation de la forme $\langle \Delta \rangle^t$ avec, Δ un segment centré. Ainsi, on peut utiliser les arguments de [Tad, §2], de nature purement combinatoire, pour montrer le théorème 2.3.4 dans le cas où D est de caractéristique positive.

2.4.2. *l-représentations de $GL_r(D)$, avec l banal.* Pourquoi n'a-t-on pas de telles classifications pour les l-représentations de $GL_r(D)$ quand l est banal ?

Dans ce cas on a deux problèmes :

1. D'abord, le point de départ. On ne sait pas montrer R1.

2. Après, on se sait pas montrer un théorème comme 2.2.4 ou 2.3.4. Remarquons que pour prouver le premier, Tadic utilise la formule des traces (via [DKV]), qui n'est pas utilisable si la caractéristique de R est positive, et pour prouver le deuxième, on a besoin de la théorie des dérivées qui -elle- n'est pas vraie pour des représentations d'une algèbre centrale simple et donc on ne peut pas, non plus, utiliser les arguments de [Vi2] ou de [Ze1].

Pourtant, on croit que ces théorèmes ainsi que le théorème de classification 2.3.6 restent vrais pour des l-représentations de $GL_r(D)$, avec l banal.

Une idée pour pouvoir les montrer serait d'étendre les résultats de Sécherre [Se1], [Se2], [Se3] en caractéristique banale, ce qui nous permettrait de prouver un théorème similaire à 2.2.4 qui, comme on a vu, est suffisant pour avoir une paramétrisation *à la Zelevinskii*.

2.4.3. *l non-banal.* Quand l est non banal on a plusieurs problèmes :

1. Les foncteurs de Jacquet ne déterminent pas les représentations irréductibles. On peut avoir des représentations différentes qui ont les mêmes foncteurs de Jacquet. Par exemple, la représentation triviale et la représentation de Steinberg de $GL_2(F)$ ont les mêmes foncteurs de Jacquet si $q \equiv 1 \mod l$ (*cf.* [Vi5]).
2. Même si on pouvait bien définir des représentations associées à des segments en utilisant les modèles de Whittaker, le problème que l'on trouve alors est que l'ensemble des segments n'est pas ordonné. Ça implique, entre autres, que l'on ne peut pas utiliser le lemme 2.3.5 et que $\Delta_1 \times \Delta_2$ peut avoir une longueur strictement plus grande que 2 (*cf.* [Vi5]).
3. Pour montrer 2.3.6, on utilise le fait que toute représentation cuspidale est supercuspidale et le fait que $\rho \times \nu\rho$ est de longueur deux.
4. La représentation $\rho \times \nu\rho$ peut être semi-simple et donc on a des difficultés pour différencier les sous-modules des quotients (*cf.* [Vi5]). Ainsi les résultats de [Ze1, §2], ne sont plus vrais.

Chapitre 3

Irréductibilité d'une induite parabolique

Dans tout ce chapitre, on ne considère que des R-représentations, avec l banal et $D = F$ ou bien on supposera[1] $R = \mathbb{C}$.

Le but de ce chapitre est de donner des conditions suffisantes sur deux représentations irréductibles π et ρ pour que leur induite parabolique $\pi \times \rho$ n'ait qu'un seul sous-module irréductible. C'est un problème très intéressant : si c'était toujours le cas, *i.e.* si l'induite parabolique de deux représentations irréductible, avait toujours un seul sous-module irréductible alors cela montrerait la conjecture (U0) de [Tad], *i.e.* le fait que l'induite $\pi \times \rho$ de deux représentations irréductibles unitaires de $GL_i(D)$ et $GL_j(D)$ respectivement reste toujours irréductible. Cette conjecture vient d'être prouvée par V. Sécherre.

Dans la deuxième partie, étant données deux représentations π et ρ telles que π soit irréductible et ρ cuspidale, on calcule les paramètres de Langlands de l'unique sous-module irréductible de $\pi \times \rho$ en fonction de ceux de π. Cela va nous permettre de calculer explicitement la correspondance de Howe dans le chapitre suivant.

De plus, ces calculs vont impliquer aussi que l'involution de Zelevinskii τ vérifie la description géométrique de [Ze2] dans les cas où R est égal $\mathbb{C}$ ou bien $D = F$ et R de caractéristique banale.

[1] On a vu dans le chapitre 2 que la théorie des représentations dans ces deux cas est *grosso modo* la même. Ainsi dans le reste de la thèse, quand on fera référence aux théorèmes 2.2.4, 2.2.5, aux remarques 2.2.5.1, 2.2.5.2, ou aux propositions 2.2.6.1, 2.2.6.3, on sous-entendra que l'on fait référence aussi aux théorèmes 2.3.4, 2.3.6, aux remarques 2.3.7.1, 2.3.7, ou aux propositions 2.3.8, 2.3.9 respectivement, ce qui nous permet de bien simplifier la lecture.

3.1 Unicité

3.1.1. La clé de ce chapitre est le théorème suivant

Théorème. *Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ des segments non liés vérifiant la condition suivante*

$$\textit{Si } i \neq j, \textit{ alors ou bien } \Delta_i = \Delta_j \textit{ ou bien } \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset. \tag{a}$$

Soit $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle^t$ (resp. $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle$) et $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$. Alors $\pi \times \rho$ a un seul sous-module irréductible et il apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{JH}(\pi \times \rho)$.

Définition. Soient $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ et $\rho \in \mathrm{Irr}(G_p)$, $p \leq n$. On définit un entier $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ par

$$\begin{aligned} l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} = \max \quad & \{ i : \exists \tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i}), \tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_i) \\ & \text{avec } \mathrm{Hom}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0, \text{et } \mathrm{supp}(\tau_2) \subset \mathrm{supp}(\rho) \}. \end{aligned}$$

Remarque. On a aussi

$$\begin{aligned} l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} = \max \quad & \{ i : \exists \tau_1' \in \mathrm{Irr}(G_{n-i}), \tau_2' \in \mathrm{Irr}(G_i) \\ & \text{avec } \tau_1' \otimes \tau_2' \in \mathrm{JH}\left(r_{(n-i,i),n}(\pi) \right), \text{et } \mathrm{supp}(\tau_2') \subset \mathrm{supp}(\rho) \}. \end{aligned}$$

En effet, si $\tau_1' \in \mathrm{Irr}(G_{n-i})$ et $\tau_2' \in \mathrm{Irr}(G_i)$, avec

$$\mathrm{supp}(\tau_2') \subset \mathrm{supp}(\rho),$$

d'après la proposition 2.1.12.1, il existerait $\tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i})$ et $\tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_i)$, avec

$$\mathrm{supp}(\tau_2) = \mathrm{supp}(\tau_2') \subset \mathrm{supp}(\rho)$$

et $\mathrm{Hom}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0$.

Cette remarque nous permet de définir l'entier $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ pour π une représentation de longueur finie (non nécessairement irréductible).

Démonstration. Posons pour simplifier $l = l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$. Soient $\tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-l}), \tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_l)$, avec $\mathrm{Hom}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0, \text{et } \mathrm{supp}(\tau_2) \subset \mathrm{supp}(\rho)$. Alors,

1. La condition (a) nous dit que les segments de ρ ne sont pas liés avec ceux de τ_2 dans la paramétrisation à la Langlands (resp. à la Zelevinskii). La représentation $\tau = \tau_2 \times \rho$ est donc irréductible d'après 2.2.6.1.

2. Par maximalité de $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ et la remarque précédente, pour tout $i \geq 1$ et tous
$$\rho_1 \otimes \rho_2 \in \mathrm{JH}\left(r_{(n-l-i,i),n-l}\left(\tau_1\right)\right),$$
$\rho_1 \in \mathrm{Irr}(G_{n-l-i})$ et $\rho_2 \in \mathrm{Irr}(G_i)$, on a
$$\mathrm{supp}\left(\rho_2\right) \nsubseteq \mathrm{supp}\left(\tau\right).$$

Le théorème découle du fait que τ et τ_1 sont alors deux représentations irréductibles qui satisfont aux conditions du corollaire 2.1.9.2. Leur induite n'a alors qu'un seul sous-module irréductible et donc, $\pi \times \rho$, sous-module non nul de $\tau_1 \times \tau$, n'a, lui aussi, qu'un seul sous-module irréductible. □

3.1.2. Si V est l'unique sous-module irréductible de $\pi \times \rho$, alors $l_V^{\mathrm{supp}(\rho)} = l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} + t$, où $t = \mathrm{gr}(\rho)$. En effet, l'inégalité $l_V^{\mathrm{supp}(\rho)} \geq l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} + t$ est claire. Pour l'autre, on remarque que, puisque le foncteur de Jacquet est exact, pour tout $\rho' \in \mathrm{Irr}$, si $\overline{\mathrm{Jac}}_{\rho'}(V) \neq 0$ (*cf.* 2.1.12.2) alors $\overline{\mathrm{Jac}}_{\rho'}(\pi \times \rho) \neq 0$ et donc $l_V^{\mathrm{supp}(\rho)} \leq l_{\pi\times\rho}^{\mathrm{supp}(\rho)}$. Ce dernier entier, par le lemme géométrique, vaut $l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}+t$.

3.1.3. En passant à la contragrédiente on trouve :

Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses, $\pi \times \rho$ a un unique quotient irréductible et il apparaît avec multiplicité* 1.

Démonstration. On a que ρ satisfait à la condition 3.1.1(a) si, et seulement si, $\widetilde{\rho}$ satisfait à la condition 3.1.1(a). Ainsi, par le théorème 3.1.1, $\widetilde{\pi} \times \widetilde{\rho}$ a un unique sous-module irréductible et il apparaît avec multiplicité 1 d'où, en passant à la contragrédiente, le corollaire. □

3.1.4. De la même façon, en utilisant le foncteur de Jacquet opposé et en redéfinissant de façon appropriée l'entier l, on va montrer le théorème ci-dessous.

Théorème. *Avec les hypothèses de 3.1.1, $\rho \times \pi$ a un seul sous-module (resp. quotient) irréductible et il apparaît avec multiplicité* 1.

Démonstration. On ne montrera que l'assertion $\rho \times \pi$ a un seul sous-module. Pour le quotient il faut juste passer à la contragrédiente comme dans 3.1.3.

On définit maintenant l'entier ${}^0l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ par
$$\begin{aligned}{}^0l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} = \max \quad & \{i : \exists \tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_i), \tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i}) \\ & \quad \text{avec } \mathrm{Hom}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0, \text{et } \mathrm{supp}(\tau_1) \subset \mathrm{supp}(\rho)\}.\end{aligned}$$

On a aussi

$$
\begin{aligned}
{}^0 l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)} = \max \quad & \{ i : \exists \tau_1' \in \mathrm{Irr}(G_i), \tau_2' \in \mathrm{Irr}(G_{n-i}) \\
& \text{avec } \tau_1' \otimes \tau_2' \in \mathrm{JH}\left(r_{(i,n-i),n}(\pi)\right), \text{et } \mathrm{supp}(\tau_1') \subset \mathrm{supp}(\rho) \}.
\end{aligned}
$$

En effet, si $\tau_1' \in \mathrm{Irr}(G_i)$ et $\tau_2' \in \mathrm{Irr}(G_{n-i})$, avec

$$\mathrm{supp}\,(\tau_1') \subset \mathrm{supp}\,(\rho)\,,$$

d'après la proposition 2.1.12.1, il existerait $\tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_i)$ et $\tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_{n-i})$, avec

$$\mathrm{supp}\,(\tau_1) = \mathrm{supp}\,(\tau_1') \subset \mathrm{supp}\,(\rho)$$

et $\mathrm{Hom}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0$.

Posons pour simplifier $l = {}^0 l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$. Soient $\tau_1 \in \mathrm{Irr}(G_l), \tau_2 \in \mathrm{Irr}(G_{n-l})$, avec $\mathrm{Hom}(\pi, \tau_1 \times \tau_2) \neq 0$, et $\mathrm{supp}(\tau_1) \subset \mathrm{supp}(\rho)$. Alors,

1. La condition (a) nous dit que les segments de ρ ne sont pas liés avec ceux de τ_1 dans la paramétrisation à la Langlands si $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle^t$ (ou à la Zelevinskii si $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle$). La représentation $\tau = \rho \times \tau_1$ est donc irréductible d'après 2.2.6.1.
2. Par maximalité de ${}^0 l_\pi^{\mathrm{supp}(\rho)}$ et ce qui précède, pour tout $i \geq 1$ et tous

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \in \mathrm{JH}\left(r_{(i,n-l-i),n-l}(\tau_2)\right),$$

$\rho_1 \in \mathrm{Irr}(G_i)$ et $\rho_2 \in \mathrm{Irr}(G_{n-l-i})$, on a

$$\mathrm{supp}\,(\rho_1) \not\subseteq \mathrm{supp}\,(\tau)\,.$$

Le théorème découle du fait que τ et τ_2 sont alors deux représentations irréductibles qui satisfont aux conditions du corollaire 2.1.9.2. Leur induite n'a alors qu'un seul sous-module irréductible et donc, $\rho \times \pi$, sous-module non nul de $\tau \times \tau_2$, n'a, lui aussi, qu'un seul sous-module irréductible.

$\square$

Remarque. On montre aussi comme dans 3.1.2 que, si V est l'unique quotient de $\rho \times \pi$, alors $l_V^\rho = l_\pi^\rho + t$, où $t = \mathrm{gr}(\rho)$.

On considère pourtant que les conditions ne sont pas nécessaires et on se pose la :

Question. *Est-ce que l'induite parabolique de deux représentations irréductibles a toujours un seul sous-module irréductible ?*

Remarquons que l'induite de *trois* représentations irréductibles peut avoir deux sous-modules irréductibles (Par exemple la représentation $1 \times |\ | \times 1$ de $GL_3(F)$.)

3.2 Calcul explicite

Dans cette section on se propose de calculer les paramètres de Langlands de l'unique sous-module irréductible de $\pi \times \rho$. Les deux premiers lemmes sont une transcription des lemmes II.8. et II.9. de [MW] dans nos notations ; on les inclut ici pour faciliter la lecture.

3.2.1. Nous introduisons quelques notations dont nous aurons besoin. On fixe une représentation cuspidale α de $GL_n(D)$. D'après le corollaire 2.2.7, il suffit de calculer les paramètres de Langlands de l'unique sous-module de $\pi \times \alpha$ pour $\pi \in \mathrm{Irr}(\alpha)$. Ainsi on peut identifier un segment $\Delta = \{\nu_\alpha^t \alpha, \nu_\alpha^{t+1}\alpha, \ldots, \nu_\alpha^r \alpha\}$ à une suite $\{t, t+1, \ldots, r\}$. Dorénavant, s'il n'y pas d'ambiguïté, quand on a fixé une représentation cuspidale, on utilisera indifféremment les deux notations. On notera aussi $b(\Delta) = t$ (ou $b(\Delta) = \nu_\alpha^t \alpha$), $e(\Delta) = r$ (ou $e(\Delta) = \nu_\alpha^r \alpha$) et Δ^+ (resp. ${}^+\Delta$, Δ^-, ${}^-\Delta$) le segment $\Delta^+ = \{\nu_\alpha^t \alpha, \ldots, \nu_\alpha^{r+1}\alpha\}$ (resp. ${}^+\Delta = \{\nu_\alpha^{t-1}\alpha, \ldots, \nu_\alpha^r \alpha\}$, $\Delta^- = \{\nu_\alpha^t \alpha, \ldots, \nu_\alpha^{r-1}\alpha\}$, ${}^-\Delta = \{\nu_\alpha^{t+1}\alpha, \ldots, \nu_\alpha^r \alpha\}$).

On notera aussi $\langle \emptyset \rangle^t$ la représentation triviale de G_0 et pour toute représentation V, $\widehat{V} = \langle \emptyset \rangle^t$ (ce qui signifie, en pratique, qu'on ôte la présence de V dans la notation).

Lemme. *Soient $\Delta, \Delta', \Delta''$, les segments*

$$\Delta = \{b, \ldots, e\}, \ \Delta' = \{b, \ldots, e'\}, \ \Delta'' = \{b'', \ldots, e''\},$$

avec $e' \leq e$, $b < b''$, $e < e''$. Alors $\langle \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta, \Delta'' \rangle^t$ est une représentation de

$$G \left(= GL\left((e + e' + e'' - 2b - b'' + 3)\, n, D\right)\right)$$

isomorphe à la représentation irréductible $\langle \Delta, \Delta', \Delta'' \rangle^t$. Il en est de même de

$$\langle \Delta, \Delta'' \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t .$$

Démonstration. Nous supposons Δ'' lié à Δ et Δ', *i. e.* $b'' \leq e' + 1$ (sinon les trois segments ne sont pas liés et donc le résultat découle trivialement de 2.2.4). D'après 2.2.6.3, les sous-quotients irréductibles de $\langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta'' \rangle^t$ sont de l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned}
V_1 &= \langle \Delta, \Delta', \Delta'' \rangle^t, \\
V_2 &= \langle \Delta \cup \Delta'', \Delta \cap \Delta'', \Delta' \rangle^t = \langle \{b, \ldots, e''\}, \{b'', \ldots, e\}, \{b, \ldots, e'\} \rangle^t, \\
V_3 &= \langle \Delta, \Delta' \cup \Delta'', \Delta' \cap \Delta'' \rangle^t = \langle \{b, \ldots, e\}, \{b, \ldots, e''\}, \{b'', \ldots, e'\} \rangle^t.
\end{aligned}$$

Remarque. Si $e' < e$, on a aussi

$V_3 = \langle \Delta \cup \Delta'', (\Delta \cap \Delta'') \cup \Delta', \Delta \cap \Delta'' \cap \Delta' \rangle^t$. En outre si e' est égal à e, alors V_3 et V_2 sont isomorphes.

On sait d'après 2.2.4, que V_3 est isomorphe au produit $\langle\Delta\rangle^t \times \langle\Delta' \cup \Delta''\rangle^t \times \langle\Delta' \cap \Delta''\rangle^t$, et on a une suite exacte courte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \quad & \langle\Delta'\rangle^t \quad \times \langle\Delta \cap \Delta''\rangle^t \times \langle\Delta \cup \Delta''\rangle^t \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad & \langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta''\rangle^t \times \langle\Delta\rangle^t \longrightarrow \langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta', \Delta''\rangle^t \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Or la représentation

$$\begin{aligned} & \nu^b\rho \otimes \ldots \otimes \nu^{b''-1}\rho \otimes \nu^b\rho \otimes \ldots \otimes \nu^{b''-1}\rho \otimes \nu^{b''}\rho \otimes \ldots \otimes \nu^{e''} \otimes \\ & \otimes \nu^{b''}\rho \otimes \ldots \otimes \nu^e\rho \otimes \nu^{b''}\rho \otimes \ldots \otimes \nu^{e'}\rho, \end{aligned}$$

intervient (d'après le lemme géométrique et la définition de segment dans la deuxième partie de la proposition 2.2.3)

2 fois dans $\overline{r}\left(\langle\Delta\rangle^t \times \langle\Delta\rangle^t \times \langle\Delta''\rangle^t\right)$ si $e \neq e'$, et 4 fois si $e = e'$.

2 fois dans $\overline{r}\left(\langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta \cup \Delta''\rangle^t \times \langle\Delta \cap \Delta''\rangle^t\right)$ si $e \neq e'$, et 4 fois si $e = e'$.

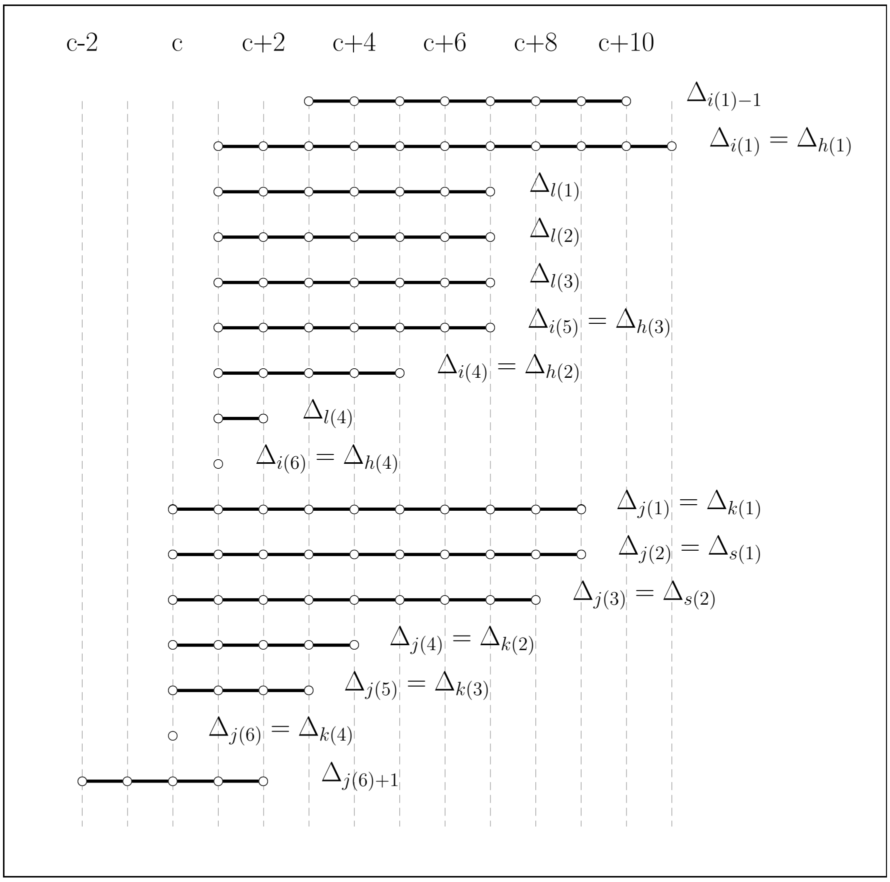
2 fois dans $\overline{r}\left(\langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta' \cup \Delta''\rangle^t \times \langle\Delta' \cap \Delta''\rangle^t\right)$ si $e \neq e'$, et 4 fois si $e = e'$,

où on note ici $\overline{r}$ le foncteur de Jacquet relatif à la partition $(n, \ldots, n)$. L'exactitude du foncteur de Jacquet, appliqué à (a), et ce qui précède prouvent que la représentation $\langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta, \Delta''\rangle^t$ contient au plus comme sous-quotients irréductibles V_1 (avec multiplicité 1) et V_2 avec multiplicité à préciser si e' est strictement inférieur à e, et nulle si e est égal à e'. Supposons donc que e est différent de e'. Dans ce cas, on vérifie que la représentation :

$$\nu^{b''}\rho \otimes \ldots \otimes \nu^e\rho \otimes \nu^b\rho \otimes \ldots \otimes \nu^{e''}\rho \otimes \nu^b\rho \otimes \ldots \otimes \nu^{e'}\rho$$

intervient au moins une fois dans $\overline{r}(V_2)$ (par 2.2.5), et exactement une fois dans $\overline{r}\left(\langle\Delta\rangle^t \times \langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta''\rangle^t\right)$. Comme précédemment, l'exactitude du foncteur de Jacquet et le fait que V_2 intervient dans $\langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta \cap \Delta''\rangle^t \times \langle\Delta \cup \Delta''\rangle^t$, prouvent que V_2 n'intervient pas dans $\langle\Delta'\rangle^t \times \langle\Delta, \Delta''\rangle^t$. Cela prouve la première partie du lemme. La seconde se prouve est une conséquence de ce qui précède et 2.1.14. $\square$

3.2.2. Le lemme ci-dessous est une adaptation du lemme II.9. de [MW]. On rappelle qu'on a fixé une représentation cuspidale α. Illustrons les notations du lemme par un exemple, qui, on l'espère, permet de mieux comprendre la situation combinatoire.



Exemple

Lemme. *Soient c un entier, $\rho = \nu^c \alpha$ la représentation associée de $GL(n, D)$, et π une représentation irréductible de $GL(N-n, D)$ paramétrée, à la Langlands, par le multisegment rangé, noté $m = \{\Delta_1 \dots \Delta_r\}$. Alors l'ensemble des représentations irréductibles de $GL(N, D)$ qui sont isomorphes à des sous-représentations de $\pi \times \rho$ (resp. à des quotients de $\rho \times \pi$) est inclus dans l'ensemble des représentations irréductibles suivantes :*

$\langle \{c\}, \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle^t$

$\langle \Delta_1, \dots, ^+\Delta_s, \dots, \Delta_t \rangle^t$ *où Δ_s est un segment de m débutant à $c+1$, et où s parcourt les entiers vérifiant la propriété suivante : notons $\Delta_{j(1)}, \dots, \Delta_{j(r)}$ les segments de m (dans l'ordre décroissant) commençant par c ; pour tout entier v compris entre 1 et r, on définit, inductivement sur v, l'entier $i(v)$ comme étant soit le plus grand entier différent de $i(1), \dots, i(v-1)$, tel que $\Delta_{i(v)}$ commence par $c+1$ et soit précédé par $\Delta_{j(v)}$, soit $i(v) = t+1$ si un tel entier n'existe pas ; alors s ne doit pas être l'un des entiers $i(v)$ qui viennent d'être définis.*

Démonstration. On note $k(1),\ldots,k(w_\pi)$, ceux des entiers $j(v)$, pour $v\in\{1,\ldots,r_\pi\}$, pour lesquels $i(v)$ est inférieur ou égal à t, $k(1),\ldots,k(w_\pi)$ étant écrits dans l'ordre croissant. Remarquons qu'on a $w_\pi\leq r_\pi$. On note aussi $h(1),\ldots,h(w_\pi)$ les $i(v)$ correspondants ; $l(1),\ldots,l(u_\pi)$ les $i(v)$ différents de ceux qui viennent d'être définis. On pose $l'_\pi=(r_\pi-w_\pi)$ et $s(1),\ldots,s(l'_\pi)$ les $i(v)$ différents de ceux qui viennent d'être définis. Remarquons que les entiers r_π,w_π,u_π,l'_π ne dépendent que des segments $\{\Delta_1\ldots\Delta_t\}$. On garde pourtant les sous-indices π pour simplifier la notation.

Pour tout entier i compris entre 1 et t, on pose

$$V_i=\begin{cases}\Delta_i,\text{ si } i\notin\{h(v):1\leq v\leq w_\pi\}\cup\{k(v):1\leq v\leq w_\pi\}\\ \left\langle\Delta_{h(v)},\Delta_{k(v)}\right\rangle^t,\ \text{ si } i=h(v),1\leq v\leq w_\pi,\\ \langle\emptyset\rangle^t,\text{si } i=k(v),1\leq v\leq w_\pi\end{cases}$$

Calculons d'abord les possibles sous-modules irréductibles de $\pi\times\rho$ (on verra que les quotients se calculent *mutatis mutandis* de la même façon). On note j le plus grand entier tel que $b(\Delta_j)\geq c+1$ (on suppose qu'un tel entier existe. Sinon, le lemme est trivial : en effet $\pi\times\rho$ est une sous-représentation de $\langle\Delta_t\rangle^t\times\cdots\times\langle\Delta_1\rangle^t\times\rho$ qui, par 2.2.5.1 n'a qu'un seul sous-module irréductible). Montrons qu'on a la suite de w_π morphismes injectifs suivante :

$$\begin{array}{lll}V_t&\times&\ldots\times V_1\hookrightarrow V_t\times\ldots\times V_{j+1}\times\left\langle\Delta_{k(w)}\right\rangle^t\times V_j\times\ldots\times V_{h(w)+1}\\ &\times&\left\langle\Delta_{h(w)}\right\rangle^t\times\widehat{V}_{h(w)}\times\ldots\times V_1\hookrightarrow\\ V_t&\times&\ldots\times V_{j+1}\times\left\langle\Delta_{k(w)}\right\rangle^t\times\left\langle\Delta_{k(w-1)}\right\rangle^t\times V_j\times\ldots\times V_{h(w)+1}\times\left\langle\Delta_{h(w)}\right\rangle^t\\ &\times&\widehat{V}_{h(w)}\times\ldots\times V_{h(w-1)+1}\times\left\langle\Delta_{h(w-1)}\right\rangle^t\times\widehat{V}_{h(w-1)}\times\ldots\times V_1\\ &&\quad(\text{ si } h(w-1)\leq h(w))\\ V_t&\times&\ldots\times V_{j+1}\times\left\langle\Delta_{k(w)}\right\rangle^t\times\left\langle\Delta_{k(w-1)}\right\rangle^t\times V_j\times\ldots\times V_{h(w-1)+1}\\ &\times&\left\langle\Delta_{h(w-1)}\right\rangle^t\times\widehat{V}_{h(w-1)}\times\ldots\times V_{h(w)+1}\times\left\langle\Delta_{h(w)}\right\rangle^t\times\widehat{V}_{h(w)}\times\ldots\times V_1\\ &&\quad(\text{ si } h(w)\leq h(w-1))\\ &&\qquad\qquad\ldots\\ &\hookrightarrow&\langle\Delta_t\rangle^t\times\ldots\times\langle\Delta_1\rangle^t.\end{array}\tag{a}$$

Au rang v, $v=1,\ldots,W_\pi$, on utilise l'inclusion

$$V_{h(v)}=\left\langle\Delta_{h(v)},\Delta_{k(v)}\right\rangle^t\hookrightarrow\left\langle\Delta_{k(v)}\right\rangle^t\times\left\langle\Delta_{h(v)}\right\rangle^t.$$

Ensuite on doit mettre $\left\langle\Delta_{k(v)}\right\rangle^t$ à la place voulue en la faisant permuter à des termes de la forme

$$\begin{array}{llll}\left\langle\Delta_{h(u)}\right\rangle^t & \text{pour} \quad u>v & \text{et} & h(u)>h(v) \\ \left\langle\Delta_i\right\rangle^t & \text{pour} \quad h(u)<i\leq j & \text{et} & i\notin\{h(u)|1\leq u\leq w_\pi\} \\ \left\langle\Delta_{h(u)},\Delta_{k(u)}\right\rangle^t & \text{pour} \quad u<v & \text{et} & h(u)>h(v).\end{array}$$

Dans ce dernier cas, comme $u<v$, on a $\Delta_{k(v)}\subset\Delta_{k(u)}$, on est dans la situation du lemme 3.2.1 qui justifie la permutation. Dans les deux premiers cas, il s'agit d'un terme de la forme $\langle\Delta_i\rangle^t$, avec $b(\Delta_i)=c+1$, $i>h(v)$, et i différent des entiers $h(1),\ldots,h(v-1)$.

D'après la définition de $h(v)$, Δ_i n'est donc pas lié à $\Delta_{k(v)}$, ce qui justifie la permutation (*cf.* 2.2.4). Pour la dernière inclusion, on utilise de plus le fait qu'on peut permuter les segments commençant par c, puisque ceux-ci ne sont pas liés.

Il résulte alors de 2.2.5.1, que π est un sous-module de $V_t\times\ldots\times V_1$, donc que $\pi\times\rho$ est un quotient de $V_t\times\ldots\times V_1\times\rho$. On rappelle que $l(1),\ldots,l(u_\pi)$ sont les entiers différents de $h(1),\ldots,h(w_\pi)$, tels que $\Delta_{l(v)}$ soit un segment commençant par $c+1$. Pour tout entier v compris entre 1 et u_π, on a une suite exacte courte :

$$\begin{array}{ll}0 \longrightarrow & V_t\times\ldots\times V_{l(v)+1}\times\left\langle{}^+\Delta_{l(v)}\right\rangle^t\times V_{l(v)-1}\times\ldots\times V_1 \\ \longrightarrow & V_t\times\ldots\times V_{l(v)+1}\times\left\langle\Delta_{l(v)}\right\rangle^t\times\rho\times\times V_{l(v)-1}\times\ldots\times V_1 \\ \longrightarrow & V_t\times\ldots\times V_{l(v)+1}\times\left\langle\Delta_{l(v)},\{c\}\right\rangle^t\times V_{l(v)-1}\times\ldots\times V_1\longrightarrow 0.\end{array} \tag{b}$$

Utilisant le lemme 3.2.1 et le corollaire 2.2.4 on a des isomorphismes :

$$V_t\times\ldots\times V_1\times\rho\cong V_t\times\ldots\times V_{l(1)}\times\rho\times V_{l(1)-1}\times\ldots\times V_1 \tag{c}$$

et pour tout $v\in\{1,\ldots,w_\pi\}$,

$$\rho\times V_{h(v)}\cong V_{h(v)}\times\rho. \tag{d}$$

D'après 2.2.5.1, on a l'inclusion , pour $v\in\{1,\ldots,u_\pi\}$

$$\begin{array}{l}V_t\ \times\ \ldots\times V_{l(v)+1}\times\left\langle\Delta_{l(v)},\{c\}\right\rangle^t\times V_{l(v)-1}\times\ldots\times V_1 \\ \quad\hookrightarrow\ V_t\times\ldots\times V_{l(v)+1}\times\rho\times\left\langle\Delta_{l(v)}\right\rangle^t\times V_{l(v)-1}\times\ldots\times V_1.\end{array} \tag{e}$$

Grâce à (b), (c), (d), (e), on voit que l'ensemble des sous-représentations irréductibles de $\pi\times\rho$ est inclus dans l'ensemble des sous-représentations irréductibles de l'une des représentations :

$$V_t\times\ldots\times V_{l(v)+1}\times\left\langle{}^+\Delta_{l(v)}\right\rangle^t\times V_{l(v)-1}\times\ldots\times V_1,\text{ pour } 1\leq v\leq u_\pi,$$
$$V_t\times\ldots\times V_{j+1}\times\rho\times V_j\times\ldots\times V_1.$$

Utilisant le même raisonnement que pour (a), on obtient les inclusions :

$$\begin{aligned} V_t \quad \times \quad & \ldots \times V_{l(v)+1} \times \left\langle {}^{+}\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times V_{l(v)-1} \times \ldots \times V_1 \hookrightarrow \\ \left\langle \Delta_t \right\rangle^t \quad & \times \ldots \times \left\langle \Delta_{l(v)+1} \right\rangle^t \times \left\langle {}^{+}\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{l(v)-1} \right\rangle^t \times \ldots \times \left\langle \Delta_1 \right\rangle^t , \end{aligned}$$

pour $1 \leq v \leq u_\pi$,

$$\begin{aligned} V_t \quad \times \quad & \ldots \times V_{j+1} \times \rho \times V_j \times \ldots \times V_1 \hookrightarrow \\ \left\langle \Delta_t \right\rangle^t \quad & \times \ldots \times \left\langle \Delta_{j+1} \right\rangle^t \times \rho \times \left\langle \Delta_j \right\rangle^t \times \ldots \times \left\langle \Delta_1 \right\rangle^t , \end{aligned}$$

Puisque le segment ${}^{+}\Delta_{l(v)}$ contient les segments Δ_i qui commencent par $c+1$ et pour lesquels i est supérieur à $l(v)$, on a aussi :

$$\begin{gathered} \left\langle \Delta_t \right\rangle^t \times \ldots \times \left\langle \Delta_{l(v)+1} \right\rangle^t \times \left\langle {}^{+}\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{l(v)-1} \right\rangle^t \times \ldots \times \left\langle \Delta_1 \right\rangle^t \cong \\ \left\langle \Delta_t \right\rangle^t \times \ldots \times \left\langle {}^{+}\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_j \right\rangle^t \times \ldots \times \left\langle \Delta_{l(v)+1} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{l(v)-1} \right\rangle^t \times \ldots \times \left\langle \Delta_1 \right\rangle^t . \end{gathered}$$

On a alors que, d'après 2.2.5.1, la représentation intervenant dans le membre de droite des deux équations précédentes a un unique sous-module irréductible, isomorphe à

$$\left\langle \{c\}, \Delta_1, \ldots, \Delta_t \right\rangle \quad \left(resp. \left\langle \Delta_1, \ldots, {}^{+}\Delta_{l(v)}, \ldots, \Delta_t \right\rangle \right) .$$

Calculons maintenant les possibles quotients irréductibles de $\rho \times \pi$. On ne peut pas utiliser l'astuce de [MW, II.10.2] car, sur un corps non commutatif, la transposée d'une matrice inversible n'est pas forcément inversible. Ainsi on doit recopier toute la preuve, juste en inversant tous les facteurs.

On note j le plus grand entier tel que $b(\Delta_j) \geq c+1$ (on suppose qu'un tel entier existe. Sinon, le lemme est trivial : en effet $\rho \times \pi$ est une quotient de $\rho \times \left\langle \Delta_1 \right\rangle^t \times \cdots \times \left\langle \Delta_t \right\rangle^t$ qui, par 2.2.5 n'a qu'un seul sous-module irréductible). Montrons qu'on a la suite de w_π morphismes surjectifs suivante :

$$\begin{aligned} V_1 \quad \times \quad & \ldots \times V_t \twoheadleftarrow V_1 \times \ldots \times \widehat{V}_{h(w)} \times \left\langle \Delta_{h(w)} \right\rangle^t \times V_{h(w)+1} \times \ldots \times V_j \\ \times \quad & \left\langle \Delta_{k(w)} \right\rangle^t \times V_{j+1} \times \ldots \times V_t \twoheadleftarrow \\ V_1 \quad \times \quad & \ldots \times \widehat{V}_{h(w-1)} \times \left\langle \Delta_{h(w-1)} \right\rangle^t \times V_{h(w-1)+1} \times \ldots \times \widehat{V}_{h(w)} \times \left\langle \Delta_{h(w)} \right\rangle^t \\ \times \quad & V_{h(w)+1} \times \ldots \times V_j \times \left\langle \Delta_{k(w-1)} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{k(w)} \right\rangle^t \times V_{j+1} \times \ldots \times V_t \\ & \quad (\text{ si } h(w-1) \leq h(w)) \\ V_1 \quad \times \quad & \ldots \times \widehat{V}_{h(w)} \times \left\langle \Delta_{h(w)} \right\rangle^t \times V_{h(w)+1} \times \ldots \times \widehat{V}_{h(w-1)} \times \left\langle \Delta_{h(w-1)} \right\rangle^t \\ \times \quad & V_{h(w-1)+1} \times \ldots \times V_j \times \left\langle \Delta_{k(w-1)} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{k(w)} \right\rangle^t \times V_{j+1} \times \ldots \times V_t \\ & \quad (\text{ si } h(w) \leq h(w-1)) \\ & \ldots \\ \twoheadleftarrow \quad & \left\langle \Delta_1 \right\rangle^t \times \ldots \times \left\langle \Delta_t \right\rangle^t . \end{aligned} \tag{f}$$

Au rang v, $v = 1, \ldots, W_\pi$, on utilise la surjection

$$V_{h(v)} = \left\langle \Delta_{h(v)}, \Delta_{k(v)} \right\rangle^t \twoheadleftarrow \left\langle \Delta_{h(v)} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{k(v)} \right\rangle^t .$$

Ensuite on doit mettre $\left\langle \Delta_{k(v)} \right\rangle^t$ à la place voulue en la faisant permuter à des termes de la forme

$\left\langle \Delta_{h(u)} \right\rangle^t$	pour	$u > v$	et	$h(u) > h(v)$
$\langle \Delta_i \rangle^t$	pour	$h(u) < i \leq j$	et	$i \notin \{h(u) \vert 1 \leq u \leq w_\pi\}$
$\left\langle \Delta_{h(u)}, \Delta_{k(u)} \right\rangle^t$	pour	$u < v$	et	$h(u) > h(v)$.

Dans ce dernier cas, comme $u < v$, on a $\Delta_{k(v)} \subset \Delta_{k(u)}$, on est dans la situation du lemme 3.2.1 qui justifie la permutation. Dans les deux premiers cas, il s'agit d'un terme de la forme $\langle \Delta_i \rangle^t$, avec $b(\Delta_i) = c + 1$, $i > h(v)$, et i différent des entiers $h(1), \ldots, h(v-1)$.

D'après la définition de $h(v)$, Δ_i n'est donc pas lié à $\Delta_{k(v)}$, ce qui justifie la permutation (*cf.* 2.2.4). Pour la dernière surjection, on utilise de plus le fait qu'on peut permuter les segments commençant par c, puisque ceux-ci ne sont pas liés.

Il résulte alors de 2.2.5, que π est un quotient de $V_1 \times \ldots \times V_t$, donc que $\rho \times \pi$ est un quotient de $\rho \times V_1 \times \ldots \times V_t$. Pour tout entier v compris entre 1 et u_π, on a une suite exacte courte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow\ & V_1 \times \ldots \times V_{l(v)-1} \times \left\langle \Delta_{l(v)}, \{c\} \right\rangle^t \times V_{l(v)+1} \times \ldots \times V_t \\ \longrightarrow\ & V_1 \times \ldots \times V_{l(v)-1} \times \rho \times \left\langle \Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times V_{l(v)+1} \times \ldots \times V_t \\ \longrightarrow\ & V_1 \times \ldots \times V_{l(v)-1} \times \left\langle {}^+\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times V_{l(v)+1} \times \ldots \times V_t \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{g}$$

Utilisant le lemme 3.2.1 et le corollaire 2.2.4 on a des isomorphismes :

$$\rho \times V_1 \times \ldots \times V_t \cong V_1 \times \ldots \times V_{l(1)-1} \times \rho \times V_{l(1)} \times \ldots \times V_t \tag{h}$$

et pour tout $v \in \{1, \ldots, w_\pi\}$,

$$\rho \times V_{h(v)} \cong V_{h(v)} \times \rho. \tag{i}$$

D'après 2.2.5, on a la surjection, pour $v \in \{1, \ldots, u_\pi\}$

$$\begin{aligned} V_1 \quad \times \quad & \ldots \times V_{l(v)-1} \times \left\langle \Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times \rho \times V_{l(v)+1} \times \ldots \times V_t \\ & \twoheadrightarrow V_1 \times \ldots \times V_{l(v)-1} \times \left\langle \Delta_{l(v)}, \{c\} \right\rangle^t \times V_{l(v)+1} \times \ldots \times V_t. \end{aligned} \tag{j}$$

Grâce à (g), (h), (i), (j), on voit que l'ensemble des quotients irréductibles de $\rho \times \pi$ est inclus dans l'ensemble des quotients irréductibles de l'une des représentations :

$$V_1 \times \ldots \times V_{l(v)-1} \times \left\langle {}^+\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times V_{l(v)+1} \times \ldots \times V_t, \text{ pour } 1 \leq v \leq u_\pi,$$
$$V_1 \times \ldots \times V_j \times \rho \times V_{j+1} \times \ldots \times V_t.$$

Utilisant le même raisonnement que pour (f), on obtient des surjections :

$$\begin{aligned} V_1 \quad &\times \quad \ldots \times V_{l(v)-1} \times \left\langle {}^{+}\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times V_{l(v)+1} \times \ldots \times V_t \twoheadleftarrow \\ \langle \Delta_1 \rangle^t \quad &\times \ldots \times \left\langle \Delta_{l(v)-1} \right\rangle^t \times \left\langle {}^{+}\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{l(v)+1} \right\rangle^t \times \ldots \times \langle \Delta_t \rangle^t , \end{aligned}$$

pour $1 \leq v \leq u_\pi$,

$$\begin{aligned} V_1 \quad &\times \quad \ldots \times V_j \times \rho \times V_{j+1} \times \ldots \times V_t \twoheadleftarrow \\ \langle \Delta_1 \rangle^t \quad &\times \ldots \times \langle \Delta_j \rangle^t \times \rho \times \langle \Delta_{j+1} \rangle^t \times \ldots \times \langle \Delta_t \rangle^t , \end{aligned}$$

Puisque le segment ${}^{+}\Delta_{l(v)}$ contient les segments Δ_i commençant par $c+1$ et pour lesquels i est supérieur à $l(v)$, on a aussi :

$$\begin{aligned} \langle \Delta_1 \rangle^t \times \ldots \times \left\langle \Delta_{l(v)-1} \right\rangle^t \times \left\langle {}^{+}\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{l(v)+1} \right\rangle^t \times \ldots \times \langle \Delta_t \rangle^t \cong \\ \langle \Delta_1 \rangle^t \quad \times \ldots \times \left\langle \Delta_{l(v)-1} \right\rangle^t \times \left\langle \Delta_{l(v)+1} \right\rangle^t \times \ldots \times \langle \Delta_j \rangle^t \times \left\langle {}^{+}\Delta_{l(v)} \right\rangle^t \times \ldots \times \langle \Delta_t \rangle^t . \end{aligned}$$

On a alors que, d'après 2.2.5, la représentation intervenant dans le membre de droite des deux équations précédentes a un unique quotient irréductible, isomorphe à

$$\langle \{c\} , \Delta_1, \ldots , \Delta_t \rangle \quad \left(resp. \left\langle \Delta_1, \ldots ,{}^{+} \Delta_{l(v)}, \ldots , \Delta_t \right\rangle \right)$$

$\square$

3.2.3. Le lemme suivant est la clé de tout ce qui suit :

Lemme. *Soient* $\Delta = \{b, \ldots , e\} , \Delta' = \{b', \ldots , e'\}$ *deux segments tels que* Δ *précède* Δ'*. Alors* $\overline{\mathrm{Jac}}_b \left(\langle \Delta, \Delta' \rangle^t \right) \neq \emptyset \Leftrightarrow b' \neq b + 1$

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \to \langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t \to \langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \to \langle \Delta, \Delta' \rangle^t \to 0.$$

Par le lemme géométrique on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{JH} \quad & \left(r_{((e-b)n,n),(e-b+1)n)} \left(\langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \right) \right) = \\ & \left\{ \left(\left\langle {}^{-}\Delta \right\rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \right) \otimes b, \left(\langle \Delta \rangle^t \times \left\langle {}^{-}\Delta' \right\rangle^t \right) \otimes b' \right\} \\ \mathrm{JH} \quad & \left(r_{((e-b)n,n),(e-b+1)n)} \left(\langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t \right) \right) = \\ & \left\{ \left(\left\langle {}^{-}(\Delta \cup \Delta') \right\rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t \right) \otimes b, \left(\langle (\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \left\langle {}^{-}(\Delta \cap \Delta') \right\rangle^t \right) \otimes b' \right\} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Jac}}_b \left(\langle \Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \right) \quad &= \quad \left(\left\langle {}^{-}\Delta \right\rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \right) \otimes b \\ \overline{\mathrm{Jac}}_b \left(\langle \Delta \cup \Delta' \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t \right) \quad &= \quad \left(\left\langle {}^{-}(\Delta \cup \Delta') \right\rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t \right) \otimes b. \end{aligned}$$

Ainsi, par exactitude du foncteur de Jacquet, on a $\overline{\mathrm{Jac}}_b\left(\langle \Delta, \Delta' \rangle^t\right) = \langle {}^-\Delta \times \Delta' \rangle^t \otimes b$ si, et seulement si, $\langle {}^-\Delta \rangle^t \times \langle \Delta' \rangle^t \neq \langle {}^-(\Delta \cup \Delta') \rangle^t \times \langle \Delta \cap \Delta' \rangle^t$, *i.e*, si $b' \neq b+1$. □

3.2.4. Cela implique le

Corollaire. *Avec les notations de 3.1.1 et 3.2.2, ρ étant toujours une représentation cuspidale de G_n, on a $l_\pi^{\{\rho\}} \leq n l'_\pi$.*

Démonstration. Avec les notations de 3.2.2 on a

$$V_1 \times \cdots \times V_t \twoheadrightarrow \pi. \tag{a}$$

D'après le lemme 3.2.3, les seuls V_i tels que $\overline{\mathrm{Jac}}_\rho(V_i) \neq \emptyset$ sont les $V_{s(i)}$ avec $1 \leq i \leq l_\pi$ et donc, par le lemme géométrique

$$l^{\{\rho\}}_{V_1 \times \cdots \times V_t} = n l'_\pi.$$

Or, par (a) et l'exactitude du foncteur de Jacquet $l_\pi^{\{\rho\}} \leq l^{\{\rho\}}_{V_1 \times \cdots \times V_t}$, ce qui prouve le lemme. □

3.2.5. On définit deux opérateurs :

$$\begin{aligned} Q_c &: M(S) \longrightarrow M(S) \\ S_c &: M(S) \longrightarrow M(S), \end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned} Q_c\left(\{\Delta_1, \ldots, \Delta_t\}\right) &= \begin{cases} \left\{\Delta_1, \ldots, {}^+\Delta_{l(1)}, \ldots, \Delta_t\right\} & \text{si } u_\pi \geq 1 \\ \left\{\{c\}, \Delta_1, \ldots, \Delta_t\right\} & \text{si } u_\pi = 0 \end{cases} \\ S_c\left(\{\Delta_1, \ldots, \Delta_t\}\right) &= \begin{cases} \left\{\Delta_1, \ldots, {}^-\Delta_{s(l'_\pi)}, \ldots, \Delta_t\right\} & \text{si } l'_\pi \geq 1 \\ \emptyset & \text{si } l'_\pi = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où le multisegment $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_t\}$ est supposé rangé.

Le lemme ci-dessous explicite, en termes des segments, l'action de S_c sur un multisegment :

Lemme. *Notons $\{\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{N'}\} = S_c(\{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\})$, et $\pi = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t$ Alors,*

1. $\Delta'_{h(v)} = \Delta_{h(v)}$ *et* $\Delta'_{k(v)} = \Delta_{k(v)}$ *pour tout* $v = 1, \ldots, r_\pi$,
2. $\Delta'_{l(v)} = \begin{cases} {}^-\Delta'_{s(l'_\pi)} & \textit{si } v = 1 \\ \Delta'_{l(v-1)} & \textit{si } v = 2, \ldots, w_\pi + 1. \end{cases}$

Démonstration. On a $\Delta'_{j(v)} = \begin{cases} \Delta'_{j(v)} & \text{si } v < j^{-1} \circ s(l'_\pi) \\ \Delta'_{j(v+1)} & \text{si } v \geq j^{-1} \circ s(l'_\pi). \end{cases}$

Montrons (1) par récurrence :

Par construction de k, il n'y a pas de segment Δ_α commençant par $c+1$ qui précède $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(1)$. Par minimalité dans l'ensemble des $\Delta_{s(\alpha)}$, ${}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède aucun des $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(1)$. D'où

$$\Delta'_{k(1)} = \Delta_{k(1)}.$$

$\Delta_{h(1)}$ est un segment dans $\{\Delta'_1, \ldots, \Delta'_N\}$ commençant par $c+1$, précédant $\Delta'_{k(1)}$ et minimal parmi les Δ_α vérifiant ces deux propriétés.

- Si $k(1) < s(l'_\pi)$, alors ${}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède pas $\Delta'_{k(1)}$.
- Si $k(1) > s(l'_\pi)$, puisque $\Delta_{h(1)}$ ne précède pas $\Delta_{s(l'_\pi)}$ (par construction de $h(1)$), alors $\Delta_{h(1)} \leq^- \Delta_{s(l'_\pi)}$,

d'où

$$\Delta'_{h(1)} = \Delta_{h(1)}.$$

Supposons maintenant que $\Delta'_{h(i)} = \Delta_{h(i)}$ et $\Delta'_{k(i)} = \Delta_{k(i)}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, v\}$, et montrons que $\Delta'_{h(v+1)} = \Delta_{h(v+1)}$ et $\Delta'_{k(v+1)} = \Delta_{k(v+1)}$.

Il n'y a pas de segment Δ_α commençant par $c+1$ qui précède $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(v+1)$ et $j(t) \notin \{k(1), \ldots, k(v)\}$. Par minimalité dans l'ensemble des $\Delta_{s(\alpha)}$, le segment ${}^-\Delta_{s(l_{pi}/n)}$ ne précède aucun des $\Delta_{j(t)}$ pour $j(t) < k(v+1)$ et $j(t) \notin \{k(1), \ldots, k(v)\}$ (ce sont des "$\Delta_{s(\beta)}$"...). D'où

$$\Delta'_{k(v+1)} = \Delta_{k(v+1)}.$$

$\Delta_{h(v+1)}$ est un segment dans $\{\Delta'_1, \ldots, \Delta'_N\}$ commençant par $c+1$, précédant $\Delta'_{k(v+1)}$ différent des $\Delta_{h(\beta)}$, pour $\beta \leq v$ et minimal parmi les Δ_α vérifiant ces trois propriétés.

- Si $k(v+1) < s(l'_\pi)$, alors ${}^-\Delta_{s(l'_\pi)}$ ne précède pas $\Delta'_{k(v+1)}$.
- Si $k(v+1) > s(l'_\pi)$, puisque $\Delta_{h(v+1)}$ ne précède pas $\Delta_{s(l'_\pi)}$ (par construction de $h(v+1)$), alors $\Delta_{h(v+1)} \leq^- \Delta_{s(l'_\pi)}$,

d'où

$$\Delta'_{h(v+1)} = \Delta_{h(v+1)}.$$

Pour montrer (2) il suffit, d'après ce qui précède, de remarquer que $\Delta_{l(1)} \leq^- \Delta_{s(l'_\pi)}$. □

3.2.6. Le corollaire suivant est une conséquence immédiate :

Corollaire. *1. Si $l'_\pi \geq 1$, alors $Q_c \circ S_c = Id_{M(S)}$.*

2. Si $l'_\pi \geq 1$, alors $l'_{\langle S_c(\{\Delta_1, \ldots, \Delta_t\})\rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_t\rangle^t} - 1$.

3. $l'_{\langle Q_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t} + 1$.
4. *Si* ω_i *est l'un des sous-modules décrits dans le lemme 3.2.2 et* $\omega_i \not\cong \langle Q_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t$*, alors* $l'_{\omega_i} = l'_{\langle \Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t}$.

3.2.7. Le théorème suivant est la conclusion de notre étude soigneuse :

Théorème. *Soient* ρ *une représentation cuspidale de* G_n, $\pi = \langle \Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t$. *Avec les notations précédentes,(on a :*

1. $l_\pi^{\{\rho\}} = n l'_\pi$
2. *L'unique sous-module irréductible de* $\langle \Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t \times \rho$ *est* $\langle Q_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t$.
3. *Si* $l'_\pi \geq 1$, $\langle \Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t$ *est un sous-module irréductible de*
$$\langle S_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle \times \rho.$$
4. *L'unique quotient irréductible de* $\rho \times \langle \Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t$ *est*
$$\langle Q_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t.$$

Démonstration. (3) est une conséquence de (2) et 3.2.6.(1).

Montrons (1) et (2) par récurrence sur l'_π.

Si $l'_\pi = 0$, d'après 3.2.4 on a $l_\pi^{\{\rho\}} = 0$. Si $\pi \times \rho$ avait pour sous-modules l'un des $\omega_i \neq \langle Q_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t$, on aurait, par 3.2.6.(4), l'gálité $l'_{\omega_i} = 0$, donc $l_{\omega_i}^{\{\rho\}} = 0$ ce qui est absurde par 3.1.2.

Supposons $l'_\pi = k > 0$. Alors, par 3.2.6.(2), $l'_{\langle S_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t} = l'_{\langle \Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t} - 1$ donc, par hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour la représentation $\langle S_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t$, *i.e.*

1. $\langle Q_c \circ S_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t$ est l'unique sous-module de $\pi \times \rho$. Or,
$$\langle Q_c \circ S_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t = \pi$$
par 3.2.6.(1).
2. $l^{\{\rho\}}_{\langle S_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t} = n(k-1)$.

Par 3.1.2, on a que $l_\pi^{\{\rho\}} = n(k-1) + n = kn$.

Finalement supposons que $\pi \times \rho$ ait pour sous-module l'un des $\omega_i \neq \langle Q_c(\{\Delta_1,\ldots,\Delta_t\})\rangle^t$. Alors, par 3.2.6.(4) on aurait $l'_{\omega_i} = l'_{\langle \Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t} = k$. On vient de montrer que, si $l'_{\omega_i} = k$, on trouve par hypothèse de récurrence $l_{\omega_i}^{\{\rho\}} = kn = l_\pi^{\{\rho\}}$ ce qui est absurde, par 3.1.2.

(4) est une conséquence de (1), de 3.2.6.(4) et de 3.1.4 ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

3.2.8. Le corollaire suivant, trivial à cause de l'existence du foncteur i de 2.1.14, dans le cas où $D = F$, sera très pratique dans nos calculs.

Corollaire. *Soient* $\pi, \pi' \in \mathrm{Irr}, \rho \in \mathcal{C}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathrm{Hom}\,(\pi', \pi \times \rho \times \cdots \times \rho) \neq 0$;
2. $\mathrm{Hom}\,(\rho \times \cdots \times \rho \times \pi, \pi') \neq 0$.

Démonstration. Puisque, par le théorème 3.1.1, $\pi \times \rho \times \cdots \times \rho$ n'a qu'un seul sous-module irréductible et par le théorème 3.1.4 $\rho \times \cdots \times \rho \times \pi$ n'a qu'un seul quotient irréductible, par récurrence, il suffit de montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Hom}\,(\pi', \pi \times \rho) \neq 0$;
2. $\mathrm{Hom}\,(\rho \times \pi, \pi') \neq 0$

ce qui est évident d'après les parties 2. et 4. du théorème précédent. □

3.2.9. Notons $\Delta_{j'(1)}, \ldots, \Delta_{j'(r'_\pi)}$ les segments de m (dans l'ordre décroissant) se terminant par c; pour tout entier v compris entre 1 et r'_π, on définit inductivement sur v, l'entier $i'(v)$ comme étant soit le plus petit entier différent de $i'(1), \ldots, i'(v-1)$, tel que $\Delta_{i'(v)}$ termine par $c-1$ et précède $\Delta_{j'(r'_\pi - v+1)}$, soit $i'(v) = t+1$ si un tel entier n'existe pas. On note $l'(1), \ldots, l'(u'_\pi)$ les $i'(v)$ différents de ceux qui viennent d'être définis.

$\omega'_0 = \langle \{c\}, \Delta_1, \ldots, \Delta_t \rangle^t$.

$\omega'_i = \left\langle \Delta_1, \ldots, \Delta^+_{l'(i)}, \ldots, \Delta_t \right\rangle^t$, où $i \in 1, \ldots, u'_\pi$.

On a défini les entiers $j'(t), i'(t)$ pour que, en appliquant la contragrédiente à partir du théorème 3.2.7, on trouve comme dans [MW] :

Corollaire. *L'unique quotient irréductible de* $\pi \times \rho$ *est* ω'_m, *où* Δ_m *est le plus petit parmi les* $\Delta_{l'(i)}, i \in 1, \ldots, u'_\pi$ *(*ω'_0*, si* $u'_\pi = 0$*).*

3.2.10. Si $\pi \times \rho$ est irréductible, alors il est clair que $u'_\pi = u_\pi = 0$. Réciproquement, si $u'_\pi = u_\pi = 0$ on a que $\omega_0 = \omega'_0$ est le seul quotient et sous-module irréductible de $\pi \times \rho$. Or, d'après 3.1.1, ω_0 apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{JH}(\pi \times \rho)$, d'où

Corollaire. $\pi \times \rho$ *est irréductible si, et seulement si,* $u'_\pi = u_\pi = 0$.

3.2.11. Maintenant il est clair que les paragraphes 3.2.1 à 3.2.7 sont aussi vrais pour les paramétrisations *à la Zelevinskii*. Il suffit de remplacer, dans les énoncés et les preuves,

1. Le mot *quotient* par *sous-représentation*,

2. le mot *sous-représentation* par *quotient*,
3. le sens de toutes les flèches
4. le symbole $\langle\ \rangle^t$ par $\langle\ \rangle$,
5. le foncteur r (resp. $\overline{r}$) par le foncteur $\overline{r}$ (resp. r).

Ainsi, on montre un théorème similaire au théorème 3.2.7 :

Théorème. *1. L'unique quotient irréductible de* $\langle \Delta_1, \ldots, \Delta_t \rangle \times \rho$ *est* $\langle Q_c (\{\Delta_1, \ldots, \Delta_t\}) \rangle$.

2. L'unique sous-module irréductible de $\rho \times \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_t \rangle$ *est* $\langle Q_c (\{\Delta_1, \ldots, \Delta_t\}) \rangle$.

Corollaire. *Soient ρ une représentation cuspidale et π une représentation irréductible. Notons τ l'involution de Zelevinskii (2.2.7). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est un sous-module irréductible de $\rho \times \pi$.*
2. *$\tau(V)$ est un sous-module irréductible de $\tau(\pi) \times \tau(\rho)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de 3.2.11.(2), 3.2.7.(2) et 2.2.7. □

3.2.12. La conséquence de ce corollaire est que les résultats du papier [MW] sont valables pour des l-représentations de $GL_n(F)$ quand est l banal et $D = F$ et aussi pour les représentations complexes de $GL_r(D)$ comme c'était conjecturé dans [Tad, Conjecture 3.6]. En effet, toute la partie I de [MW] était consacré à la preuve du corollaire 3.2.11 pour π et ρ des représentations *irréductibles* d'une certaine algèbre de Hecke mais pour la preuve du théorème qui suit, ils n'utilisaient que le corollaire précédent.

Théorème. *L'involution τ vérifie la description géométrique de [Ze2].*

Démonstration. Il suffit de changer dans la preuve du théorème [MW, II.13] la proposition I.7.3 par le corollaire précédent. □

3.3 Un peu de combinatoire : un lemme technique

Ici on montre un lemme qui nous aidera à calculer explicitement la correspondance thêta dans la section 4.6.

Lemme 3.3.1. *Soit π la sous-représentation irréductible de $\langle\Delta'_1,\ldots,\Delta'_{t'}\rangle^t \times \langle c\rangle$ et π' la sous-représentation irréductible de $\langle b,\ldots,b-a,\Delta'_1,\ldots,\Delta'_{t'}\rangle^t \times \langle c\rangle$, $a \geq 0$.*

Si $c \notin \{b, b-a-1\}$ et $\pi = \langle\Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t$, alors

$$\pi' = \langle b,\ldots,b-a,\Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t .$$

Démonstration. La condition $c \notin \{b, b-a-1\}$ équivaut à la condition suivante :

$$c \in \{b, b-1,\ldots,b-a,b-a-1\} \Leftrightarrow c+1 \in \{b,b-1,\ldots,b-a,b-a-1\} .$$

Ainsi, si l'on note $\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$ (resp. $\{\delta'_1,\ldots,\delta'_{n'}\}$) le sous-ensemble de $\{\Delta'_1,\ldots,\Delta'_{t'}\}$ (resp. $\{b,\ldots,b-a,\Delta'_1,\ldots,\Delta'_{t'}\}$ des segments commençant par c ou $c+1$ on a que :

1. Si $c \in \{b,b-1,\ldots,b-a,b-a-1\}$, alors
$$\{c, c+1, \delta_1,\ldots,\delta_n\} = \{\delta'_1,\ldots,\delta'_{n'}\} .$$
2. Si $c \notin \{b,b-1,\ldots,b-a,b-a-1\}$, alors
$$\{\delta_1,\ldots,\delta_n\} = \{\delta'_1,\ldots,\delta'_{n'}\} .$$

Dans le deuxième cas le lemme est une conséquence immédiate de 3.2.7. Dans le premier cas, il est évident, par récurrence comme dans 3.2.5, que $\delta'_{l(v)} = \delta_{l(v)}$ pour $v = 1,\ldots,\omega_{\langle\delta'_1,\ldots,\delta'_{n'}\rangle^t}$ et $\omega_{\langle\delta_1,\ldots,\delta_n\rangle^t} = \omega_{\langle\delta'_1,\ldots,\delta'_{n'}\rangle^t}$. On achève la démonstration avec le théorème 3.2.7. □

On récrit le lemme dans les notations qu'on utilisera dans la suite. On rappelle qu'on a défini, pour $g \in D^\times$, $\nu(g) = |\mathrm{Nrd}_D(g)|_F$.

Corollaire 3.3.2. *Soit π l'unique sous-représentation irréductible de $\langle\nu^{-c}\rangle \times \langle\Delta'_1,\ldots,\Delta'_{t'}\rangle^t$ et π' la sous-représentation irréductible de*

$$\left\langle \nu^b,\ldots,\nu^{b-a},\widetilde{\Delta'_1},\ldots,\widetilde{\Delta'_{t'}}\right\rangle^t \times \langle\nu^c\rangle ,$$

$a \geq 0$. Si $c \notin \{b, b-a-1\}$ et $\pi = \langle\Delta_1,\ldots,\Delta_t\rangle^t$, alors

$$\pi' = \left\langle \nu^b,\ldots,\nu^{b-a},\widetilde{\Delta_1},\ldots,\widetilde{\Delta_t}\right\rangle^t .$$

Démonstration. La sous-représentation irréductible de $\langle\nu^{-c}\rangle \times \langle\Delta'_1,\ldots,\Delta'_{t'}\rangle^t$ est, par passage à la contragrédiente et 3.2.8, l'unique sous-représentation irréductible de $\left\langle\widetilde{\Delta'_1},\ldots,\widetilde{\Delta'_{t'}}\right\rangle^t \times \langle\nu^c\rangle$. Le corollaire est donc une conséquence immédiate de 3.3.1. □

Chapitre 4

Correspondance de Howe explicite

4.1 Introduction

4.1.1. Dans ce chapitre, on fait une étude détaillée de la correspondance de Howe sur un corps local non archimédien pour les paires de type II.

Soient donc (après on verra qu'il faut faire quelques restrictions sur l) F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, D une algèbre à division de centre F de dimension finie d^2 sur F, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, $\mathcal{P} = \varpi\mathcal{O}$ un idéal maximal, ϖ une uniformisante, $k_D = \mathcal{O}/\mathcal{P}$ son corps résiduel et q le cardinal de k_D. Soient aussi R un corps algébriquement clos de caractéristique $l \neq p$ (éventuellement nulle) et n et m des entiers strictement positifs.

On note $\mathcal{M}_{m,n}$ (resp. $\mathcal{M}_n$) l'ensemble de matrices $n \times m$ (resp. $n \times n$) à coefficients dans D. Le groupe $GL_n(D)$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n$ sera noté G_n. Le groupe trivial sera noté G_0.

On note $S_{n,m} = S\left(\mathcal{M}_{m,n}\right)$ l'ensemble des fonctions $\Phi : \mathcal{M}_{m,n} \to R$ localement constantes à support compact.

On note $\sigma_{n,m} : G_n \times G_m \to GL\left(S_{n,m}\right)$ la représentation naturelle de $G_n \times G_m$ définie par

$$\sigma_{n,m}\left(g, g'\right)\Phi\left(x\right) = \Phi\left(g^{-1}xg'\right),$$

pour $g \in G_n,\ g' \in G_m,\ x \in \mathcal{M}_{m,n},\ \Phi \in S_{n,m}$.

La représentation métaplectique $\omega_{n,m}$ restreinte à la paire duale $G_n \times G_m$ (*cf.* [MVW, 3.III.1]) est la représentation

$$\omega_{n,m}(g, g') = \nu(g)^{\frac{-m}{2}}\sigma_{n,m}(g, g')\nu(g')^{\frac{n}{2}}.$$

Pour simplifier les notations on va travailler avec la représentation $\sigma_{n,m}$.

On permet les cas $m = 0$ ou $n = 0$ pour lesquels $\mathcal{M} = 0$ et $\sigma_{0,m} \simeq R$ est la représentation triviale de G_m et $\sigma_{n,0} \simeq R$ est la représentation triviale de G_n.

4.1.2. Supposons $n \leq m$. Soit π une R-représentation irréductible de G_n. La conjecture de Howe prédit qu'il existe une unique représentation irréductible de G_m notée $\theta_{n,m}(\pi)$, telle que $\pi \otimes \theta_{n,m}(\pi)$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$, et que dans ce cas

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}\left(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \theta_{n,m}(\pi)\right)\right) = 1.$$

Dans l'appendice, on la montre en suivant des idées de Howe, pour l banal. Dans ce chapitre on donne une nouvelle preuve constructive qui n'utilise que des propriétés des foncteurs de Jacquet de la représentation $\sigma_{n,m}$ et les classifications du chapitre 2. On verra que la correspondance est bijective si l est banal (pour $\max\{n, m\}$) et $D = F$ ou bien on supposera $R = \mathbb{C}$ (en fait il nous faut juste avoir une classification comme celles du chapitre 2). On donnera aussi des exemples, quand l n'est pas banal, pour lesquels, étant donné π irréductible on a plusieurs représentations irréductibles différentes π' avec $\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi')$ et même

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}\left(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi'\right)\right) > 1.$$

La démonstration, étant constructive, nous permet d'expliciter, en termes des classifications du chapitre 2, $\theta_{n,m}(\pi)$ en fonction de π. On prouvera ainsi le théorème ci-dessous qui est le résultat principal de la thèse et qui répond à une conjecture de Waldspurger.

Théorème. *Supposons $n \leq m$, et que l banal et $D = F$ ou bien que $R = \mathbb{C}$.*

Soit π une représentation irréductible de G_n. Il existe une unique représentation irréductible π' de G_m telle que

$$\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}\left(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi'\right) \neq 0.$$

De plus, $\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}\left(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi'\right)\right) = 1$ *et*

$$\pi' = \left\langle \nu^{-\frac{n}{2} - \frac{m-n-1}{2}}, \ldots, \nu^{-\frac{n}{2} + \frac{m-n-1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t$$

si $\pi = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t$.

Remarque. Supposons $R = \mathbb{C}$. Si $\pi \otimes \pi'$ est un quotient de la représentation $\omega_{n,m}$ (*c.f.* 4.1.1) et π est le quotient de Langlands de $\tau_1 \times \cdots \times \tau_N$ où $\tau_1, \ldots, \tau_N$ sont des représentations essentiellement de carré intégrable alors π' est le quotient de Langlands de

$$\nu^{-\frac{m-n-1}{2}} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n-1}{2}} \times \widetilde{\tau_1} \times \cdots \times \widetilde{\tau_N},$$

formule qui respecte l'unitarité.

4.1.3. L'idée de la démonstration est la suivante :

Pour l'existence d'un entrelacement, on développe dans le chapitre 5 la théorie des fonctions zêta avec des coefficients dans un corps de caractéristique quelconque. On supposera ici, ce que l'on montrera dans le chapitre 5 que, si $m \geq n$ et $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$, il existe $\pi' \in \mathrm{Irr}(G_m)$ avec

$$\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi') \neq 0.$$

L'unicité est montrée dans ce chapitre :

En 4.2 on étudie une suite de composition de la représentation métaplectique. On en déduit (comme dans [MVW, 3.III.] quand $R = \mathbb{C}$) que, si

$$\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi') \neq 0,$$

alors :

1. Il existe $i \leq n$, $\tau \in \mathrm{Irr}(G_i)$ tels que π est un sous-quotient de $\nu^{\frac{i}{2}} 1_{n-i} \times \nu^{\frac{-n+i}{2}} \tau$ et π' est un sous-quotient de $\nu^{\frac{-i}{2}} 1_{m-i} \times \nu^{\frac{m-i}{2}} \widetilde{\tau}$;
2. en particulier $\mathrm{supp}(\pi') = \left\{ \nu^{-\frac{n}{2} - \frac{m-n-1}{2}}, \ldots, \nu^{-\frac{n}{2} + \frac{m-n-1}{2}} \right\} \cup \mathrm{supp}\left(\nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\pi} \right)$,
3. on montre le théorème 4.1.2 pour beaucoup de représentations, en particulier pour les cuspidales de G_n, $n \geq 2$, *même si l est non banal.*

Pour avoir des renseignements plus précis on suit [Ku1] et, dans 4.3, on calcule une suite de composition *des foncteurs de Jacquet* de la représentation métaplectique. Soient alors $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$, $\pi' \in \mathrm{Irr}(G_m)$ telles que $\pi \otimes \pi'$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$. D'abord on voit que ce n'est pas très compliqué de se ramener au cas où $\pi \in \mathcal{R}(\nu) \cup \mathcal{R}\left(\nu^{\frac{1}{2}}\right)$ (voir 2.2.7 pour les notations). Par exactitude du foncteur de Jacquet on aura que $\pi \otimes r'_{(1,m-1),m}(\pi')$ est un quotient de $r'_{(1,m-1),m}(\sigma_{n,m})$. Si $\xi' \otimes \rho'$ est un quotient de $r'_{(1,m-1),m}(\pi')$ alors $\pi \otimes \xi' \otimes \rho'$ sera un quotient de $r'_{(1,m-1),m}(\sigma_{n,m})$. Ainsi, en utilisant cette suite calculée précédemment et 2.1.12.2, on peut séparer les caractères ξ' par lesquels GL_1 agit.

Pour toutes les représentations $\pi \in \mathrm{Irr}\, G_n$, $\pi' \in \mathrm{Irr}\, G_m$ dont les foncteurs de Jacquet font intervenir des caractères distincts de deux caractères bien particuliers, la suite de composition calculée précédemment, se réduit à un seul terme ce que nous permettra, par récurrence, de montrer dans ces cas le théorème.

Il ne nous restera à montrer le théorème que pour des représentations dont les foncteurs de Jacquet font intervenir ces deux caractères uniquement. Il n'y a pas trop de telles représentations irréductibles et elles sont parmi celles pour lesquelles les arguments de la section 4.2 marchent bien.

Dans la section 4.5, on calcule explicitement, à la main, la correspondance $(G_1(F), G_n(F))$, et on donne des exemples, dans le cas non banal, où cette correspondance n'est pas bijective.

4.1.4. On utilisera, pour simplifier, les notations abrégées suivantes :

1. Les groupes P, U, G (resp. P', U', G') agissent sur la représentation métaplectique à gauche (resp. à droite).
2. On note $r_{i,j}$ (resp $r'_{i,j}$) le foncteur de Jacquet associé aux groupes $P_{(i,j),i+j}, G_{i+j}$ (resp. $P'_{(i,j),i+j}, G'_{i+j}$).
3. On note $\overline{r}_{i,j}$ (resp $\overline{r'}_{i,j}$) le foncteur de Jacquet associé aux groupes $\overline{P}_{(i,j),i+j}, G_{i+j}$ (resp. $\overline{P'}_{(i,j),i+j}, G'_{i+j}$).
4. ρ_i est la représentation naturelle de $G_i \times G'_i$ sur $S(G_i)$.
5. 1_i est la représentation triviale de G_i.

4.2 Première filtration

4.2.1. Dans ce paragraphe, on généralise les idées de 1.2.8. La représentation $\sigma_{n,m}$ admet une première filtration

$$0 = S_{t+1} \subset S_t \subset \cdots \subset S_1 \subset S_0 = S_{n,m},$$

où

$$S_k = \{\Phi \in S_{n,m} : \operatorname{supp} \Phi \subset \{\textit{matrices de rang } \geq k\}\},$$

$0 \leq k \leq t = \min(n, m)$.

On a un isomorphisme ([MVW, 3.III.2], la preuve s'étend immédiatement à R quelconque)[1]

$$S_k/S_{k+1} \simeq \sigma_k = \operatorname{ind}_{\overline{P}_k P'_k}^{G_n G'_m} \left(\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \mu_k\right),$$

où δ est le module (voir 2.1.2 pour les calculs explicites des modules) et μ_k est la représentation de $\overline{P}_k P'_k$ sur $S(G_k)$ définie par :

$$\mu_k(p, p')\Phi(h) = \Phi\left(p_4^{-1} h p'_4\right) = \rho_k(p_4, p'_4)\Phi(h),$$

$\Phi \in S(G_k)$, $h \in G_k$, $p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$, $p' = \begin{pmatrix} p'_1 & p'_2 \\ 0 & p'_4 \end{pmatrix}$.

[1] Dans [MVW, 3.III.2], on travaille avec des induites non normalisées, ce qui rend les notations de cette section plus simples ; nous avons opté de conserver les induites normalisées pour ne pas devoir traduire, dans les chapitres ultérieurs, les résultats de cette section et avoir une homogénéité dans la thèse.

4.2.2. Rappelons d'abord le lemme [MVW, 3.II.3] qui sera utilisé plusieurs fois dans ce chapitre :

Lemme. *Pour toute $\pi \in Irr\,(G_k)$, le plus grand quotient π-isotypique de ρ_k est isomorphe à $\pi \otimes \widetilde{\pi}$ comme $G_k \times G_k$-module.*

Pour toute représentation V, on notera $V\,[\pi]$ son plus grand quotient π-isotypique. Puisque le foncteur induction est exact (*cf.* 2.1.4) on a immédiatement

Corollaire. *On suppose $n \leq m$. Pour toute $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ le plus grand quotient π-isotypique de $\sigma_n|_{G_n \times 1}$ est isomorphe à*

$$\pi \otimes \mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m} \left(\nu^{\frac{-n}{2}} 1_{m-n} \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\pi} \right),$$

comme $G_n \times G'_m$-module.

Démonstration. En effet, par exactitude du foncteur induction, le morphisme surjectif $p_\pi : \rho_n \twoheadrightarrow \rho_n\,[\pi]$ induit un morphisme surjectif

$$ip_\pi : \sigma_n \simeq \mathrm{ind}_{G_n \times P'_n}^{G_n \times G'_m} \left(\delta_{P'_n}^{-\frac{1}{2}} \rho_n \right) \twoheadrightarrow \mathrm{ind}_{G_n \times P'_n}^{G_n \times G'_m} \left(\delta_{P'_n}^{-\frac{1}{2}} \rho_n\,[\pi] \right).$$

D'après le lemme précédent, $\rho_n\,[\pi] \simeq \pi \otimes \widetilde{\pi}$ comme $G_n \times G'_n$-module. Ainsi on trouve un morphisme surjectif

$$\sigma_n\,[\pi] \twoheadrightarrow \mathrm{ind}_{G_n \times P'_n}^{G_n \times G'_m} \left(\delta_{P'_n}^{-\frac{1}{2}} \pi \otimes \widetilde{\pi} \right) \simeq \pi \otimes \mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m} \left(\nu^{\frac{-n}{2}} 1_{m-n} \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\pi} \right).$$

Le morphisme est aussi injectif. En effet, soit $\phi \in \sigma_n$ tel que $ip_\pi(\phi) = 0$ *i.e.* tel que, pour tout $t \in \mathrm{Hom}_{G_n}(\rho_n, \pi)$, on ait $t \circ \phi = 0$. Alors on a bien que, pour tout $t' \in \mathrm{Hom}_{G_n} \left(\mathrm{ind}_{G_n \times P'_n}^{G_n \times G'_m} \left(\delta_{P'_n}^{-\frac{1}{2}} \rho_n \right), \pi \right)$, $t' \circ \phi = 0$, *i.e.* pour tout $t' \in \mathrm{Hom}_{G_n}(\sigma_n, \pi)$, $t' \circ \phi = 0$, c'est à dire, $\phi \in \bigcap_{t' \in \mathrm{Hom}_{G_n}(\sigma_n, \pi)} \ker t'$. □

4.2.3. Pour toute $\pi \in Irr\,(G_k)$ l'entrelacement naturel (*cf.* [MVW, 3.II.3])

$$\Lambda_\pi : \rho_k \longrightarrow \pi \otimes \widetilde{\pi},$$

défini par

$$\Lambda_\pi(\Phi) = \int_{G_k} \Phi(g)\, \pi(g)\, d^\times g$$

induit des entrelacements

$$\Lambda_\pi^k : \sigma_k \rightarrow \mathrm{ind}_{P_k}^{G_n} \left(\nu^{\frac{k}{2}} 1_{n-k} \otimes \nu^{\frac{-n+k}{2}} \pi \right) \otimes \mathrm{ind}_{P'_k}^{G'_m} \left(\nu^{\frac{-k}{2}} 1_{m-k} \otimes \nu^{\frac{m-k}{2}} \widetilde{\pi} \right),$$

avec $\Lambda_\pi^k(F) : G_n \times G'_m \to \pi \otimes \widetilde{\pi}$ définie par

$$\Lambda_\pi^k(F)(g,g') = \Lambda_\pi(F(g,g')),$$

pour F dans l'espace de σ_k.

Lemme. *Soient* $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$*,* $\pi' \in \mathrm{Irr}(G'_m)$ *telles que* $\mathrm{Hom}(\sigma_k, \pi \otimes \pi') \neq 0$. *Alors il existe* $\tau, \tau' \in \mathrm{Irr}(G_k)$ *telle que*

$$\mathrm{Hom}_{G_n \times G'_m}\left(\mathrm{ind}_{\overline{P}_k}^{G_n}\left(\nu^{\frac{k}{2}} 1_{n-k} \otimes \nu^{\frac{-n+k}{2}} \tau\right) \otimes \mathrm{ind}_{P'_k}^{G'_m}\left(\nu^{\frac{-k}{2}} 1_{m-k} \otimes \nu^{\frac{m-k}{2}} \tau'\right), \pi \otimes \pi'\right) \neq 0.$$

Démonstration. Soient $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$, $\pi' \in \mathrm{Irr}(G'_m)$ telles que $\mathrm{Hom}(\sigma_k, \pi \otimes \pi') \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}(\sigma_k, \pi \otimes \pi') \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Hom}\left(\mathrm{ind}_{\overline{P}_k P'_k}^{G_n G'_m}\left(\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \mu_k\right), \pi \otimes \pi'\right) \neq 0, \end{aligned}$$

par définition. Ceci équivaut, par 2.1.4(b), à

$$\mathrm{Hom}\left(\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \mu_k, r_{(n-k,k),n}(\pi) \otimes \overline{r'}_{(m-k,k),m}(\pi')\right) \neq 0.$$

Soient V une sous-représentation de $r_{(n-k,k),n}(\pi) \otimes \overline{r'}_{(m-k,k),m}(\pi')$ telle qu'on ait un morphisme surjectif

$$\mathrm{Hom}\left(\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \mu_k, V\right) \neq 0.$$

Alors, par construction, V est de la forme $\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \otimes I$, I étant une $G_k \times G'_k$-représentation.

Par réciprocité de Frobenius, une sous-représentation irréductible de I de la forme $\tau \otimes \tau'$ satisfait aux conditions du lemme.

On trouve alors comme dans [Ku1] :

Corollaire. *Soient* $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$*,* $\pi' \in \mathrm{Irr}(G'_m)$ *telles que* $\mathrm{Hom}(\sigma_k, \pi \otimes \pi') \neq 0$. *Alors,*

$$\mathrm{supp}(\pi') = \left\{\nu^{-\frac{n}{2} - \frac{m-n-1}{2}}, \ldots, \nu^{-\frac{n}{2} + \frac{m-n-1}{2}}\right\} \cup \mathrm{supp}\left(\nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\pi}\right).$$

Démonstration. Il existe $k \in \{0, \dots, \min(n, m)\}$ tel que $\mathrm{Hom}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi') \neq 0$. Alors, comme l'on vient de voir

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}\,(\sigma_k, \pi \otimes \pi') \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{Hom}\left(\mathrm{ind}_{\overline{P}_k P'_k}^{G_n G'_m}\left(\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \mu_k\right), \pi \otimes \pi'\right) \neq 0, \end{aligned}$$

par définition. Ceci équivaut, par 2.1.4(b), à

$$\mathrm{Hom}\left(\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \mu_k, r_{(n-k,k),n}(\pi) \otimes \overline{r'}_{(m-k,k),m}(\pi')\right) \neq 0.$$

Soient V une sous-représentation de $r_{(n-k,k),n}(\pi) \otimes \overline{r'}_{(m-k,k),m}(\pi')$ telle qu'on ait un morphisme surjectif

$$\mathrm{Hom}\left(\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \mu_k, V\right) \neq 0.$$

Alors, par construction, V est de la forme $\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \otimes I$, I étant une $G_k \times G'_k$-représentation. Soit $\tau \otimes \tau'$ un quotient irréductible de I. Alors

$$\mathrm{Hom}\,(\rho_k, \tau \otimes \tau') \neq 0$$

et donc $\tau' \simeq \widetilde{\tau}$.

Ainsi $r_{(n-k,k),n}(\pi) \otimes \overline{r'}_{(m-k,k),m}(\pi')$ a un sous-quotient de la forme

$$\delta_{\overline{P}_k}^{-\frac{1}{2}} \delta_{P'_k}^{-\frac{1}{2}} \otimes \tau \otimes \widetilde{\tau},$$

d'oú le résultat. □

□

4.2.4. Supposons $R = \mathbb{C}$ ou bien $D = F$ et R de caractéristique banale. Rappelons que, d'après le chapitre précédent, on a alors que, pour toute représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$, la représentation $\mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m}(\nu^{\frac{-n}{2}} 1_{m-n} \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}} \pi)$ a un unique quotient irréductible. Le théorème suivant est tout ce que l'on peut conclure à partir de cette première filtration.

Théorème. *Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ telle qu'il n'existe pas $\tau \in \mathrm{Irr}(G_k)$, $k < n$, avec $\mathrm{Hom}_{G_n}\left(\mathrm{ind}_{\overline{P}_k}^{G_n}\left(\nu^{\frac{k}{2}} 1_{n-k} \otimes \nu^{\frac{-n+k}{2}} \tau\right), \pi\right) \neq 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $\pi' \in Irr(G'_m)$ telle que $\mathrm{Hom}_{G_n \times G'_m}(\sigma_{n,m}, \pi \otimes \pi') \neq 0$.*
2. *$m \geq n$ et π' est l'unique quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m}(\nu^{\frac{-n}{2}} 1_{m-n} \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\pi})$.*

De plus, dans le cas où l'une de ces deux conditions est satisfaite on a

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n\times G'_m}\left(\sigma_{n,m},\pi\otimes\pi'\right)\right)=1.$$

Démonstration. Soit $\pi'\in Irr(G'_m)$ telle que

$$\mathrm{Hom}_{G_n\times G'_m}\left(\sigma_{n,m},\pi\otimes\pi'\right)\neq 0.$$

Par composition avec les morphismes $S_j\longrightarrow\sigma_{n,m}$, $j=0,\dots,n$, on obtient des morphismes $S_j\longrightarrow\pi\otimes\pi'$.

Soit k le plus grand j tel que $S_j\longrightarrow\pi\otimes\pi'$ ne soit pas le morphisme nul. On a donc que $\pi\otimes\pi'$ est un quotient de σ_k. D'après le lemme 4.2.3, il existe alors $\tau\in\mathrm{Irr}(G_k)$ telle que $\mathrm{Hom}_{G_n}\left(\mathrm{ind}_{\overline{P}_k}^{G_n}\left(\nu^{\frac{k}{2}}1_{n-k}\otimes\nu^{\frac{-n+k}{2}}\tau\right),\pi\right)\neq 0$. Par hypothèse on a $k=n$ et donc $m\geq n$ et, d'après le corollaire 4.2.2, π' est l'unique quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m}(\nu^{\frac{-n}{2}}1_{m-n}\otimes\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\pi})$.

Inversement, dans le chapitre 5, dans la section 5.7, on construira, à l'aide de fonctions zêta l-modulaires, des morphismes non nuls

$$\mathrm{Hom}_{G_n\times G'_m}\left(\sigma_{n,m},\pi\otimes\mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m}(\nu^{\frac{-n}{2}}1_{m-n}\otimes\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\pi})\right).$$

On conclut qu'il existe π' un sous-quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m}(\nu^{\frac{-n}{2}}1_{m-n}\otimes\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\pi})$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{G_n\times G'_m}\left(\sigma_{n,m},\pi\otimes\pi'\right)\neq 0.$$

D'après la démonstration du sens direct on a que π' est isomorphe au quotient de $\mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m}(\nu^{\frac{-n}{2}}1_{m-n}\otimes\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\pi})$. Puisque ce quotient, d'après 3.1.1, apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m}(\nu^{\frac{-n}{2}}1_{m-n}\otimes\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\pi})$, on a que, en fait, π' est l'unique quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{P'_n}^{G'_m}(\nu^{\frac{-n}{2}}1_{m-n}\otimes\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\pi})$

Si $\lambda\in\mathrm{Hom}_{G_n\times G'_m}\left(\sigma_{n,m},\pi\otimes\pi'\right)$, dans ce cas on a donc que la composée de λ avec l'inclusion $\sigma_n\hookrightarrow\sigma_{n,m}$ n'est pas nulle. Or, par le corollaire 4.2.2, cette composée est unique à homothéthie près. Ainsi, si

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n\times G'_m}\left(\sigma_{n,m},\pi\otimes\pi'\right)\right)>1,$$

on pourrait construire un morphisme non nul $\lambda\in\mathrm{Hom}_{G_n\times G'_m}\left(\sigma_{n,m},\pi\otimes\pi'\right)$ tel que sa composée avec l'inclusion $\sigma_n\hookrightarrow\sigma_{n,m}$ soit nulle. D'après la filtration il existe alors $k<n$ tel que $\mathrm{Hom}_{G_n}\left(\sigma_k,\pi\right)\neq 0$, et d'après le lemme 4.2.3, on trouve $\tau\in\mathrm{Irr}(G_k)$ telle que

$$\mathrm{Hom}_{G_n}\left(\mathrm{ind}_{\overline{P}_k}^{G_n}\left(\nu^{\frac{k}{2}}1_{n-k}\otimes\nu^{\frac{-n+k}{2}}\tau\right),\pi\right)\neq 0,$$

ce qui est absurde et qui achève la démonstration. $\square$

On a une remarque intéressante à ce point-ci :

Remarque. Dans cette section on n'a eu besoin d'utiliser l'hypothèse de banalité sur le corps de coefficients que pour parler de *l'unique quotient irréductible*. En particulier, si π est une représentation cuspidale de G_n, $n \geq 2$, le théorème 4.2.4 s'applique en toute caractéristique $l \neq p$ car, dans ces cas, il n'existe pas $\tau \in \mathrm{Irr}(G_k)$, $k < n$, avec $\mathrm{Hom}_{G_n}\left(\mathrm{ind}_{P_k}^{G_n}\left(\nu^{\frac{k}{2}} 1_{n-k} \otimes \nu^{\frac{-n+k}{2}} \tau\right), \pi\right) \neq 0$ et, avec les arguments de 3.1.1, c'est très simple de montrer que, même si l n'est pas banal, la représentation $\mathrm{ind}_{P_n'}^{G_m'}(\nu^{\frac{-n}{2}} 1_{m-n} \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\pi})$ n'a qu'un seul quotient irréductible et il apparaît avec multiplicité 1.

4.3 Deuxième filtration

4.3.1. Soient t, i des entiers, $0 < t \leq n$, $0 \leq i \leq \inf\{t, m\}$. Fixons quelques notations pour ce paragraphe :

– On notera chaque matrice $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_{m,n}$ par

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & a & \\ m_1 & & m_2 \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathcal{M}_{m,t}, b \in \mathcal{M}_{m,n-t}, m_1 \in \mathcal{M}_{i,n-t},\ m_2 \in \mathcal{M}_{m-i,n-t}, .$

– On notera chaque $g \in M_{t,n-t}$ par

$$g = \begin{pmatrix} g_0 & \\ & g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 & g_3 & \\ g_4 & g_5 & \\ & & g_1 \end{pmatrix},$$

$g_0 \in G_t,\ g_1 \in G_{n-t},\ g_2 \in \mathcal{M}_{t-i,t-i},\ g_3 \in \mathcal{M}_{i,t-i},\ g_4 \in \mathcal{M}_{t-i,i},\ g_5 \in \mathcal{M}_{i,i}.$

– On notera chaque $g' \in G_m'$ par

$$g' = \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ g_3' & g_4' \end{pmatrix},$$

où $g_1' \in \mathcal{M}_{i,i},\ g_2' \in \mathcal{M}_{i,m-i},\ g_3' \in \mathcal{M}_{m-i,i},\ g_4' \in \mathcal{M}_{m-i,m-i}.$

On définit $\sigma_{n,m}^*$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} S_{n,m} \arrow[r, "\sigma_{n,m}(g,g')"] \arrow[d, "\wr"'] & S_{n,m} \arrow[d, "\wr"'] \\ S_{n,m} \arrow[r, "\sigma_{n,m}^*(g,g')"] & S_{n,m} \end{tikzcd} ,$$

où $\widehat{}$ est défini par

$$\widehat{f}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \int_{\mathcal{M}_{m,t}} f\begin{pmatrix} a^* \\ b \end{pmatrix} \psi \circ tr\left({}^t a a^*\right) da^*,$$

pour $f \in S_{n,m}$.

On se propose d'étudier la représentation $\sigma^*_{n,m}$ (transformée de Fourier partielle de $\sigma_{n,m}$) pour obtenir des renseignements sur $\sigma_{n,m}$.

$\sigma^*_{n,m}$ agit sur $\widehat{f}$ par

$$\sigma^*_{n,m}(g, g')\, \widehat{f}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \int_{\mathcal{M}_{t,n}} f\left(g^{-1}\begin{pmatrix} a^* \\ b \end{pmatrix} g'\right) \psi \circ tr\left({}^t a a^*\right) da^*.$$

Ainsi $U_{t,n-t}$ agit, via $\sigma^*_{n,m}$, par

$$\sigma^*_{n,m}\begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} \widehat{f}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \psi \circ tr\left(-{}^t a u b\right) \widehat{f}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{a}$$

Notons A l'ensemble :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n} : b^t a = 0 \right\}.$$

Lemme. *Le sous-espace $S_{n,m}\left(U_{t,n-t}, \sigma^*_{n,m}\right)$ de $S_{n,m}$ engendré par les fonctions de la forme*

$$\widehat{f} - \sigma^*_{n,m}(u)\widehat{f},$$

où $f \in S_{n,m}$ et $u \in U_{t,n-t}$ est l'espace des $\widehat{f} \in S_{n,m}$ telles que

$$\mathrm{supp}\, \widehat{f} \cap A = \emptyset,$$

Démonstration. Sur A, $\widehat{f} - \sigma^*_{n,m}(u)\widehat{f}$ est, par (a), nul. Réciproquement, soit $\widehat{f} \neq 0$ nulle sur A et montrons que $\widehat{f} \in S_{n,m}\left(U_{t,n-t}, \sigma^*_{n,m}\right)$. Le lemme sera démontré.

Pour tout $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}$, notons $\alpha_{\mathbf{m}}$ le caractère défini par

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{m}} \;:\; & U_{t,n-t} \to R \\ & u \mapsto \psi \circ tr\left(-{}^t a u b\right). \end{aligned}$$

Pour tout $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_{m,n} \backslash A$, il existe $u_{\mathbf{m}} \in U_{t,n-t}$ tel que $\alpha_{\mathbf{m}}(u_{\mathbf{m}}) \neq 1$. Pour $\mathbf{m}'$ dans un voisinage I de $\mathbf{m}$, on a par continuité $\alpha_{\mathbf{m}'}(u_{\mathbf{m}}) = \alpha_{\mathbf{m}}(u_{\mathbf{m}}) \neq 1$. Le support de $\widehat{f}$, étant compact, il suffit de montrer que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_I$ du voisinage I est de la forme $\widehat{F} - \sigma^*_{n,m}(u)\widehat{F}$, pour $F \in S_{n,m}$.

Puisque, $\alpha_{\mathbf{m}'}(u_{\mathbf{m}}) = \alpha_{\mathbf{m}}(u_{\mathbf{m}}) \neq 1$ on a que $\mathbf{1}_I$ est égal à $\sigma^*_{n,m}(u)\mathbf{1}_I$ à une constante non nulle près. Ainsi, $\widehat{F} = \frac{1}{1-\alpha_{\mathbf{m}}(u_{\mathbf{m}})}\mathbf{1}_I$ convient.

□

Ainsi la suite exacte courte

$$\begin{array}{rcl} 0 \to S\left(\mathcal{M}\backslash A\right) \to S_{n,m} & \to & S(A) \to 0 \\ \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}|_A \end{array}$$

s'identifie à

$$0 \to S_{n,m}\left(U_{t,n-t}, \sigma^*_{n,m}\right) \to S_{n,m} \to S(A) \to 0$$

et donc $S(A)$ muni de l'action de $M_{t,n-t}$ s'identifie au foncteur de Jacquet non normalisé, d'où un isomorphisme de $M_{t,n-t}$-modules :

$$S(A) \simeq \delta^{\frac{1}{2}}_{P_{t,n-t}} r_{t,n-t}\left(\sigma_{n,m}\right).$$

On a alors une filtration de $\delta^{\frac{1}{2}}_{P_{t,n-t}} r_{t,n-t}\left(\sigma_{n,m}\right)$ de $M_{t,n-t} \times G'_m$-modules :

$$0 = S^*_{k+1} \subset S^*_k \subset \cdots \subset S^*_1 \subset S^*_0 = \delta^{\frac{1}{2}}_{P_{t,n-t}} r_{t,n-t}\left(\sigma_{n,m}\right),$$

où

$$\begin{array}{rcl} S^*_i & = & \left\{\widehat{f} \in S(A) : \widehat{f}(a) = 0 \text{ si } \operatorname{rang}(a) \leq i-1\right\} \\ k & = & \inf(t,m). \end{array}$$

On veut calculer les quotients

$$\begin{array}{rcl} \tau_i & = & S_i/S_{i+1}, \\ S_i & = & \delta^{\frac{-1}{2}}_{P_{t,n-t}} S^*_i,\ 0 \leq i \leq k. \end{array}$$

car $r_{t,n-t}\left(\sigma_{n,m}\right)$ est composée des représentations τ_i, $i = 0, \ldots, \min\{t,m\}$.

Notons τ^*_i la $M_{t,n-t} \times G'_m$-représentation non normalisée :

$$S^*_i/S^*_{i+1}.$$

La suite exacte de $M_{t,n-t} \times G'_m$-modules

$$0 \to S^*_i \to S^*_{i+1} \to S(A_i) \to 0$$

où $A_i = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n} : b^t a = 0 \text{ et } \operatorname{rang}(a) = i\right\}$, nous montre que l'espace de τ^*_i est l'espace des fonctions $\left\{\widehat{f} \in S(A_i)\right\}$.

Soit

$$m_i = \begin{pmatrix} & a_i & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \in A_i,$$

où $a_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_i & 0 \end{pmatrix}$.

Le stabilisateur T_i dans $M_{t,n-t} \times G'_m$ de m_i est le sous-groupe des $(g, g') \in P_{t-i,i} \times G_{n-t} \times P'_{i,m-i}$ tels que $g_5^{-1} g'_1 = 1$.

Notons

$$\begin{array}{rcl} t : A_i & \rightarrow & \{a \in \mathcal{M}_{m,t} : \mathrm{rang}(a) = i\} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & a. \end{array}$$

Soit $A_{i,0}$ la fibre au dessus de a_i. Alors $A_{i,0} = \begin{pmatrix} & a_i \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Lemme. *La restriction de τ_i^* à $A_{i,0}$ est T_i-isomorphe à $\xi_{t,i}^0 \otimes \sigma_{n-t,m-i}$ où $\xi_{t,i}^0$ est le caractère de T_i défini par $\nu(g_0)^m \nu(g')^{-t}$, pour $(g, g') \in T_i$.*

Démonstration. Soient $(g, g') \in T_i$, $x \in S_{n-t,m-i}$, et $\widehat{f} \in S(A_i)$. On a que

$$\tau_i^*(g, g') \widehat{f} \begin{pmatrix} & a_i \\ 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{M}_{m,t}} f\left(g^{-1} \begin{pmatrix} & a^* \\ 0 & x \end{pmatrix} g'\right) \psi \circ tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a^*\right) da^* \\
&= \int_{\mathcal{M}_{m,t}} f \begin{pmatrix} & g_0^{-1} a^* g' \\ 0 & g_1^{-1} x g'_3 \end{pmatrix} \psi \circ tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a^*\right) da^* \\
&= \nu(g_0)^m \nu(g')^{-t} \int_{\mathcal{M}_{m,t}} f \begin{pmatrix} & a^* \\ 0 & g_1^{-1} x g'_3 \end{pmatrix} \psi \circ tr\left(\begin{pmatrix} 0 & (g_5^{-1} g'_1)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a^*\right) da^* \\
&= \nu(g_0)^m \nu(g')^{-t} \int_{\mathcal{M}_{m,t}} f \begin{pmatrix} & a^* \\ 0 & g_1^{-1} x g'_3 \end{pmatrix} \psi \circ tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a^*\right) da^* \\
&= \nu(g_0)^m \nu(g')^{-t} \sigma_{n-t,m-i}(g_1, g'_3) \widehat{f}|_{\begin{pmatrix} & a_i \\ 0 & * \end{pmatrix}}(x).
\end{aligned}$$

□

Corollaire. *La représentation $r_{t,n-t}(\sigma_{n,m})$ est composée des représentations τ_i, $i = 0, \ldots, \min\{t, m\}$, où*

$$\tau_i \simeq \mathrm{ind}_{P_{t-i,i} \times G_{n-t} \times P'_{i,m-i}}^{M_{t,n-t} \times G'_m} (\xi_{t,i} \otimes \rho_i \otimes \sigma_{n-t,m-i}),$$

avec $\xi_{t,i}$ est le caractère

$$\xi_{t,i} = \begin{cases} \nu^{\frac{2m-n+t-i}{2}} & sur\ G_{t-i} \\ \nu^{\frac{2m-n+2t-i}{2}} & sur\ G_i \\ \nu^{\frac{t}{2}} & sur\ G_{n-t} \\ \nu^{\frac{-m-2t+i}{2}} & sur\ G'_i \\ \nu^{\frac{-2t+i}{2}} & sur\ G'_{m-i}. \end{cases}$$

Démonstration. Comme dans [MVW, 3.V.2], le lemme précédent implique que

$$\tau_i^* \simeq (\#\,\mathrm{ind})_{T_i}^{M_{t,n-t}\times G'_m}\left(\xi^0_{t,i}\otimes\sigma_{n-t,m-i}\right),$$

où on note $(\#\,\mathrm{ind})$ le foncteur d'induction non normalisé.

Induire de T_i à $M_{t,n-t}\times G'_m$ revient à induire de T_i à $P_{t-i,i}\times G_{n-t}\times P'_{i,m-i}$ et puis à $M_{t,n-t}\times G'_m$. Or, l'induite $(\#\,\mathrm{ind})_{T_i}^{P_{t-i,i}\times G_{n-t}\times P'_{i,m-i}}\left(\xi^0_{t,i}\otimes\sigma_{n-t,m-i}\right)$ est la représentation $\xi^0_{t,i}\otimes\rho_i\otimes\sigma_{n-t,m-i}$.

Ainsi, l'induite $(\#\,\mathrm{ind})_{T_i}^{M_{t,n-t}\times G'_m}\left(\xi^0_{t,i}\otimes\sigma_{n-t,m-i}\right)$ est la représentation

$$(\#\,\mathrm{ind})_{P_{t-i,i}\times G_{n-t}\times P'_{i,m-i}}^{M_{t,n-t}\times G'_m}\left(\xi^0_{t,i}\otimes\rho_i\otimes\sigma_{n-t,m-i}\right).$$

Pour achever le corollaire il ne nous reste que changer les induites non normalisées par des induites normalisées et τ_i^* par τ_i. Ainsi

$$\tau_i \simeq \mathrm{ind}_{P_{t-i,i}\times G_{n-t}\times P'_{i,m-i}}^{M_{t,n-t}\times G'_m}\left(\xi_{t,i}\otimes\rho_i\otimes\sigma_{n-t,m-i}\right),$$

avec

$$\xi_{t,i} = \nu\left(g_0\right)^m\nu\left(g'\right)^{-t}\delta_{P_{t-i,i}}^{\frac{-1}{2}}\delta_{P_{t,n-t}}^{\frac{-1}{2}}\delta_{P'_{i,m-i}}^{\frac{-1}{2}},$$

i.e. il est le caractère

$$\xi_{t,i} = \begin{cases} \nu^{\frac{2m-n+t-i}{2}} & \text{sur } G_{t-i} \\ \nu^{\frac{2m-n+2t-i}{2}} & \text{sur } G_i \\ \nu^{\frac{t}{2}} & \text{sur } G_{n-t} \\ \nu^{\frac{-m-2t+i}{2}} & \text{sur } G'_i \\ \nu^{\frac{-2t+i}{2}} & \text{sur } G'_{m-i}. \end{cases}$$

Remarque. Dans le cas où $t = n$, on trouve la filtration de la section précédente.

□

4.3.2. Dans ce paragraphe on utilise les mêmes arguments pour calculer une suite de décomposition du foncteur de Jacquet, agissant cette fois-ci *à droite*. Soient t, i des entiers, $0 < t \leq m$ $0 \leq i \leq \inf\{t, n\}$. Fixons quelques notations pour ce paragraphe :

– On notera chaque matrice $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_{m,n}$ par

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathcal{M}_{t,n}, b \in \mathcal{M}_{m-t,n}, m_1 \in \mathcal{M}_{m-t,n-i},\ m_2 \in \mathcal{M}_{m-t,i}$.

– On notera chaque $g' \in M_{t,m-t}$ par

$$g' = \begin{pmatrix} g'_0 & \\ & g'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_2 & g'_3 & \\ g'_4 & g'_5 & \\ & & g'_1 \end{pmatrix},$$

$g'_0 \in G_t$, $g'_1 \in G_{m-t}$, $g'_2 \in \mathcal{M}_{i,i}$, $g'_3 \in \mathcal{M}_{t-i,i}$, $g'_4 \in \mathcal{M}_{i,t-i}$, $g'_5 \in \mathcal{M}_{t-i,t-i}$.

– On notera chaque $g \in G_n$ par

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix},$$

où $g_1 \in \mathcal{M}_{n-i,n-i}$, $g_2 \in \mathcal{M}_{n-i,i}$, $g_3 \in G_{i,n-i}$, $g_4 \in \mathcal{M}_{i,i}$.

On définit $\sigma^*_{n,m}$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S_{n,m} & \xrightarrow{\sigma_{n,m}(g,g')} & S_{n,m} \\ \big\downarrow \widehat{} & & \big\downarrow \widehat{} \\ S_{n,m} & \xrightarrow{\sigma^*_{n,m}(g,g')} & S_{n,m} \end{array},$$

où $\widehat{}$ est défini par

$$\widehat{f}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \int_{\mathcal{M}_{t,n}} f\begin{pmatrix} a^* & b \end{pmatrix} \psi \circ tr\left({}^t a a^*\right) da^*,$$

pour $f \in S_{n,m}$.

On se propose d'étudier la représentation $\sigma^*_{n,m}$ (transformée de Fourier partielle de $\sigma_{n,m}$) pour obtenir des renseignements sur $\sigma_{n,m}$.

$\sigma^*_{n,m}$ agit sur $\widehat{f}$ par

$$\sigma^*_{n,m}(g, g')\widehat{f}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \int_{\mathcal{M}_{t,n}} f\left(g^{-1}\begin{pmatrix} a^* & b \end{pmatrix} g'\right) \psi \circ tr\left({}^t a a^*\right) da^*.$$

Ainsi $\overline{U'}_{t,m-t}$ agit, via $\sigma^*_{n,m}$, par

$$\sigma^*_{n,m}\begin{pmatrix} 1 & \\ u' & 1 \end{pmatrix}\widehat{f}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \psi\circ tr\left(-{}^t a u' b\right)\widehat{f}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}. \tag{a}$$

Notons A' l'ensemble :

$$A' = \left\{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n} : b^t a = 0\right\}.$$

Lemme. *Le sous-espace $S_{n,m}\left(\overline{U'}_{t,m-t}, \sigma^*_{n,m}\right)$ de $S_{n,m}$ engendré par les fonctions de la forme*

$$\widehat{f} - \sigma^*_{n,m}(u')\widehat{f},$$

où $f \in S_{n,m}$ et $u \in \overline{U'}_{t,m-t}$ est l'espace des $\widehat{f} \in S_{n,m}$ telles que

$$\operatorname{supp}\widehat{f} \cap A' = \emptyset.$$

Démonstration. Sur A', $\widehat{f} - \sigma^*_{n,m}(u')\widehat{f}$ est, par (a), nul. Réciproquement, soit $\widehat{f} \neq 0$ nulle sur A' et montrons que $\widehat{f} \in S_{n,m}\left(\overline{U'}_{t,m-t}, \sigma^*_{n,m}\right)$. Le lemme sera démontré.

Pour tout $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}$, notons $\alpha_{\mathbf{m}}$ le caractère défini par

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{\mathbf{m}} & : & \overline{U'}_{t,m-t} \to R \\ & & u' \mapsto \psi\circ tr\left(-{}^t a u' b\right). \end{array}$$

Pour tout $\mathbf{m} \in \mathcal{M}_{m,n}\backslash A'$, il existe $u'_{\mathbf{m}} \in \overline{U'}_{t,m-t}$ tel que $\alpha_{\mathbf{m}}(u'_{\mathbf{m}}) \neq 1$. Pour $\mathbf{m}'$ dans un voisinage I de $\mathbf{m}$, on a par continuité $\alpha_{\mathbf{m}'}(u'_{\mathbf{m}}) = \alpha_{\mathbf{m}}(u'_{\mathbf{m}}) \neq 1$. Le support de $\widehat{f}$, étant compact, il suffit de montrer que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_I$ du voisinage I est de la forme $\widehat{F} - \sigma^*_{n,m}(u')\widehat{F}$, pour $F \in S_{n,m}$.

Puisque, $\alpha_{\mathbf{m}'}(u'_{\mathbf{m}}) = \alpha_{\mathbf{m}}(u'_{\mathbf{m}}) \neq 1$ on a que $\mathbf{1}_I$ est égal à $\sigma^*_{n,m}(u')\mathbf{1}_I$ à une constante non nulle près. Ainsi, $\widehat{F} = \frac{1}{1-\alpha_{\mathbf{m}}(u'_{\mathbf{m}})}\mathbf{1}_I$ convient.

□

Ainsi la suite exacte courte

$$\begin{array}{rcl} 0 \to S\left(\mathcal{M}\backslash A'\right) \to S_{n,m} & \to & S(A') \to 0 \\ \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}|_{A'} \end{array}$$

s'identifie à

$$0 \to S_{n,m}\left(\overline{U'}_{t,m-t}, \sigma^*_{n,m}\right) \to S_{n,m} \to S(A') \to 0$$

et donc $S(A')$ muni de l'action de $M'_{t,m-t}$ s'identifie au foncteur de Jacquet non normalisé, d'où un isomorphisme de $M_{t,n-t}$-modules :

$$S(A') \simeq \delta^{\frac{1}{2}}_{P'_{t,m-t}} \overline{r'}_{t,m-t}\left(\sigma_{n,m}\right),$$

On a alors une filtration de $\delta^{\frac{1}{2}}_{P'_{t,m-t}} \overline{r'}_{t,m-t}\left(\sigma_{n,m}\right)$ de $G_n \times M'_{t,m-t}$-modules :

$$0 = S^*_{k+1} \subset S^*_k \subset \cdots \subset S^*_1 \subset S^*_0 = \delta^{\frac{1}{2}}_{P'_{t,m-t}} \overline{r}_{t,m-t}\left(\sigma_{n,m}\right),$$

où

$$\begin{aligned} S^*_i &= \left\{\widehat{f} \in S(A') : \widehat{f}(a) = 0 \text{ si } \operatorname{rang}(a) \leq i-1\right\} \\ k &= \inf(t,n). \end{aligned}$$

On veut calculer les quotients

$$\begin{aligned} \overline{\tau'}_i &= S_i/S_{i+1}, \\ S_i &= \delta^{\frac{-1}{2}}_{P_{t,m-t}} S^*_i,\ 0 \leq i \leq k \end{aligned}$$

car $\overline{r'}_{t,m-t}\left(\sigma_{n,m}\right)$ est composée des représentations $\overline{\tau'}_i$, $i = 0, \ldots, \min\{t, n\}$. Notons $\overline{\tau'}^*_i$ la $G_n \times M'_{t,m-t}$-représentation non normalisée :

$$S^*_i/S^*_{i+1}.$$

La suite exacte de $G_n \times M'_{t,m-t}$-modules

$$0 \to S^*_i \to S^*_{i+1} \to S(A'_i) \to 0$$

où $A'_i = \left\{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n} : b^t a = 0 \text{ et } \operatorname{rang}(a) = i\right\}$, nous montre que l'espace de $\overline{\tau'}^*_i$ est l'espace de fonctions $\left\{\widehat{f} \in S(A'_i)\right\}$.

Soit

$$m'_i = \begin{pmatrix} a_i & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \in A',$$

où $a_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_i & 0 \end{pmatrix}$.

Le stabilisateur T'_i dans $G_n \times M'_{t,m-t}$ de m'_i est le sous-groupe des $(g, g') \in P_{n-i,i} \times P'_{i,t-i} \times G'_{m-t}$ tels que $g_4^{-1} g'_2 = 1$.

Notons

$$\begin{aligned} t : A'_i &\to \{a \in \mathcal{M}_{t,n} : \operatorname{rang}(a) = i\} \\ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} &\mapsto a. \end{aligned}$$

Soit $A'_{i,0}$ la fibre au dessus de a_i. Alors $A'_{i,0} = \begin{pmatrix} a_i & \begin{matrix} * \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$.

Lemme. *La restriction de* $\overline{\tau'}_i^*$ *à* $A'_{i,0}$ *est* T'_i*-isomorphe à* $\sigma_{n-i,m-t} \otimes \overline{\xi'}^0_{t,i}$ *où* $\overline{\xi'}^0_{t,i}$ *est le caractère de* T'_i *défini par* $\nu(g)^t \nu(g'_0)^{-n}$*, pour* $(g, g') \in T_i$.

Démonstration. Soient $(g, g') \in T_i$, $x \in S_{n-i,m-t}$, et $\widehat{f} \in S(A'_i)$. On a que

$$\overline{\tau'}_i^* (g, g') \widehat{f} \begin{pmatrix} a^* & x \\ & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{M}_{t,n}} f\left(g^{-1}\begin{pmatrix} a^* & x \\ & 0 \end{pmatrix} g'\right) \psi \circ tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a^*\right) da^* \\
&= \nu(g)^t \nu(g'_0)^{-n} \int_{\mathcal{M}_{t,n}} f \begin{pmatrix} a^* & g_1^{-1} x g'_1 \\ & 0 \end{pmatrix} \psi \circ tr\left(g_0'^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g a^*\right) da^* \\
&= \nu(g)^t \nu(g'_0)^{-n} \sigma_{n-i,m-t}(g_1, g'_1) \widehat{f}|_{\begin{pmatrix} a_i & * \\ & 0 \end{pmatrix}} (x).
\end{aligned}$$

□

Corollaire. *La représentation* $\overline{r'}_{t,m-t}(\sigma_{n,m})$ *est composée des représentations* $\overline{\tau'}_i$, $i = 0, \ldots, \min\{t, n\}$ *où*

$$\overline{\tau'}_i \simeq \operatorname{ind}_{P_{n-i,i} \times P'_{i,t-i} \times G'_{m-t}}^{G_n \times M'_{t,m-t}} \left(\sigma_{n-i,m-t} \otimes \rho_i \otimes \overline{\xi'}_{t,i}\right),$$

avec $\overline{\xi'}_{t,i}$ *est le caractère*

$$\overline{\xi'}_{t,i} = \begin{cases} \nu^{\frac{2t-i}{2}} & sur\ G_{n-i} \\ \nu^{\frac{n+2t-i}{2}} & sur\ G_i \\ \nu^{\frac{-2n+m-2t+i}{2}} & sur\ G'_i \\ \nu^{\frac{m-2n-t+i}{2}} & sur\ G'_{t-i} \\ \nu^{\frac{-t}{2}} & sur\ G'_{m-t}. \end{cases}$$

Démonstration. Comme dans [MVW, 3.V.2], le lemme précédent implique que

$$\overline{\tau'}_i^* \simeq (\#\operatorname{ind})_{T'_i}^{G_n \times M'_{t,m-t}} \left(\sigma_{n-i,m-t} \otimes \overline{\xi'}^0_{t,i}\right),$$

où on note, à nouveau, $(\#\operatorname{ind})$ le foncteur d'induction non normalisé.

Induire de T'_i à $G_n \times M'_{t,m-t}$ revient à induire de T_i à $P_{n-i,i} \times P'_{i,t-i} \times G'_{m-t}$ et puis à $G_n \times M'_{t,m-t}$. Or, l'induite $(\#\operatorname{ind})_{T'_i}^{P_{n-i,i} \times P'_{i,t-i} \times G'_{m-t}} \left(\sigma_{n-i,m-t} \otimes \overline{\xi'}^0_{t,i}\right)$ est la représentation $\sigma_{n-i,m-t} \otimes \rho_i \otimes \overline{\xi'}^0_{t,i}$.

Ainsi, l'induite $(\#\,\mathrm{ind})_{T'_i}^{G_n\times M'_{t,m-t}}\left(\sigma_{n-i,m-t}\otimes\overline{\xi'}^0_{t,i}\right)$ est la représentation

$$(\#\,\mathrm{ind})_{P_{n-i,i}\times P'_{i,t-i}\times G'_{m-t}}^{G_n\times M'_{t,m-t}}\left(\sigma_{n-i,m-t}\otimes\rho_i\otimes\overline{\xi'}^0_{t,i}\right).$$

Pour achever le corollaire il ne nous reste que changer les induites non normalisées par des induites normalisées et $\overline{\tau'}^*_i$ par $\overline{\tau'}_i$. Ainsi

$$\overline{\tau'}_i\simeq\mathrm{ind}_{P_{n-i,i}\times P'_{i,t-i}\times G'_{m-t}}^{G_n\times M'_{t,m-t}}\left(\sigma_{n-i,m-t}\otimes\rho_i\otimes\overline{\xi'}_{t,i}\right),$$

avec

$$\xi_{t,i}=\nu\left(g\right)^t\nu\left(g'_0\right)^{-n}\delta_{P_{n-i,i}}^{\frac{-1}{2}}\delta_{P_{t,m-t}}^{\frac{-1}{2}}\delta_{P'_{i,t-i}}^{\frac{-1}{2}},$$

i.e. il est le caractère

$$\overline{\xi'}_{t,i}=\begin{cases}\nu^{\frac{2t-i}{2}} & \text{sur } G_{n-i}\\ \nu^{\frac{n+2t-i}{2}} & \text{sur } G_i\\ \nu^{\frac{-2n+m-2t+i}{2}} & \text{sur } G'_i\\ \nu^{\frac{m-2n-t+i}{2}} & \text{sur } G'_{t-i}\\ \nu^{\frac{-t}{2}} & \text{sur } G'_{m-t}.\end{cases}$$

□

4.4 Application

4.4.1. Soient $\pi\in\mathrm{Irr}\,G_n$, $\pi'\in\mathrm{Irr}\,G_m$ telles que $\pi\otimes\pi'$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$. Pour toute représentation cuspidale χ, avec $\mathrm{gr}(\chi)=r$ considérons $a\geq 0$ maximal tel que

$$\pi\hookrightarrow\chi\times\chi\times\cdots\times\chi\times\rho,$$

où on a fait le produit de a fois la représentation χ fois ρ, ρ étant une représentation irréductible de G_{n-ra}. Alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n,m},\pi\otimes\pi'\right)\neq 0\\ \Rightarrow\ &\mathrm{Hom}\left(r_{ra,n-ra}\left(\sigma_{n,m}\right),r_{ra,n-ra}\left(\pi\otimes\pi'\right)\right)\neq 0\\ \Rightarrow\ &\mathrm{Hom}\left(r_{ra,n-ra}\left(\sigma_{n,m}\right),\chi\times\chi\times\cdots\times\chi\otimes\rho\otimes\pi'\right)\neq 0.\end{aligned}$$

D'après 4.3.1, il existe alors $i\in\{0,\ldots,ra\}$ tel que

$$\mathrm{Hom}\left(\tau_i,\chi\times\chi\times\cdots\times\chi\otimes\rho\otimes\pi'\right)\neq 0.$$

Lemme. *Les seuls τ_i qui peuvent avoir des quotients de la forme ci-dessus sont τ_{ra} et τ_{ra-1} et, si $\chi\neq\nu^{\frac{2m-n+1}{2}}$ seulement τ_a peut en avoir.*

Démonstration. En effet, supposons que

$$\mathrm{Hom}\,(\tau_i, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi') \neq 0.$$

Cela signifie

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{ind}_{P_{ra-i,i}\times G_{n-ra}\times P'_{i,m-i}}^{M_{ra,n-ra}\times G'_m}\left(\xi_{ra,i}\otimes\rho_i\otimes\sigma_{n-ra,m-i}\right), \\ \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi'\Big) \neq 0$$

et, par 2.1.4(b),

$$\mathrm{Hom}\Big(\xi_{ra,i}\otimes\rho_i\otimes\sigma_{n-ra,m-i}, \\ \overline{r}_{P_{ra-i,i}\times G_{n-ra}\times P'_{i,m-i}}^{M_{ra,n-ra}\times G'_m}\left(\chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi'\right)\Big) \neq 0,$$

d'où

$$\mathrm{Hom}\Big(\xi_{ra,i}|_{M_{ra-i,i}}\otimes\rho_i, \overline{r}_{P_{ra-i,i}}^{G_{ra}}\left(\chi \times \chi \times \cdots \times \chi\right)\Big) \neq 0,$$

Ainsi, on trouve finalement

$$\mathrm{Hom}\Big(\nu_{ra-i}^{\frac{2m-n+ra-i}{2}}, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi\Big) \neq 0.$$

Par l'unicité du support cuspidal, il faut alors que

$$\mathrm{supp}\Big(\nu_{ra-i}^{\frac{2m-n+ra-i}{2}}\Big) \subset \{\chi, \ldots, \chi\}$$

et donc, ou bien $i = ra$ ou bien $i = ra - 1$ et $\chi = \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}$. □

Ainsi on se retrouve avec deux cas :

Cas A Ou bien, $\mathrm{Hom}\,(\tau_{ra}, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi') \neq 0$,

Cas B ou bien, $\mathrm{Hom}\,(\tau_{ra-1}, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi') \neq 0$.

4.4.2. Examinons successivement les différents cas du lemme plus haut.

Cas A Supposons d'abord $\mathrm{Hom}\,(\tau_{ra}, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi') \neq 0$ (ce qui arrive, en particulier, d'après le lemme précédent, pour χ distinct de $\nu^{\frac{2m-n+1}{2}}$)

Alors, $\mathrm{Hom}\,(\tau_{ra}, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi') \neq 0$, implique que

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{ind}_{P'_{ra,m-ra}}^{G'_m}\Big(\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\sigma_{n-ra,m-ra}\nu^{\frac{-ra}{2}}\Big), \\ \rho \otimes \pi'\Big) \neq 0.$$

Soit $b \geq 0$ maintenant maximal tel qu'il existe une représentation irréductible ρ' de G_{m-rb} avec π' quotient de

$$\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \rho'$$

où on a fait le produit de b fois la représentation $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$.

Remarquons que, d'après le corollaire 3.2.8, on a que π' sous-module de

$$\rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi},$$

où on a fait le produit de b fois la représentation $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$.

Par 2.1.4(a), on a un homomorphisme non trivial précédent de $r'_{m-rb,rb}(\pi')$ dans $\rho' \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$ d'où un homomorphisme non trivial de $\overline{r'}_{rb,m-rb}(\pi')$ dans $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \rho'$.

D'un autre côté, le foncteur de Jacquet étant exact, on a un morphisme surjectif dans

$$\mathrm{Hom}\left(\overline{r'}_{rb,m-rb} \circ \mathrm{ind}_{P'_{ra,m-ra}}^{G'_m}\left(\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\sigma_{n-ra,m-ra}\nu^{\frac{-ra}{2}}\right), \rho \otimes \overline{r'}_{rb,m-rb}(\pi')\right),$$

qui, composé avec le homomorphisme non trivial de $\overline{r'}_{rb,m-rb}(\pi')$ dans $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \rho'$, montre que

$$\mathrm{Hom}\left(\overline{r'}_{rb,m-rb} \circ \mathrm{ind}_{P'_{ra,m-ra}}^{G'_m}\left(\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\sigma_{n-ra,m-ra}\nu^{\frac{-ra}{2}}\right), \rho \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \rho'\right) \neq 0.$$

Montrons qu'on a :

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{ind}_{P'_{ra,b-ra}}^{G'_{rb}}\Big(\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\overline{r'}_{rb-ra,m-rb}\left(\sigma_{n-ra,m-ra}\right)\nu^{\frac{-ra}{2}}\Big), \rho \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \rho'\Big) \neq 0.$$

En effet, d'après le lemme géométrique (*cf.* 2.1.8), la $G'_{rb} \times G'_{m-rb}$-représentation

$$\overline{r'}_{rb,m-rb} \circ \mathrm{ind}_{P'_{ra,m-ra}}^{G'_m}\left(\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\sigma_{n-ra,m-ra}\nu^{\frac{-ra}{2}}\right)$$

est composée des représentations de la forme

$$\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \omega_1 \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \omega_2$$

avec $\omega_1 \otimes \omega_2 \in \mathrm{JH}\left(r_{(n_1,n_2),m-ra}\right)$. Si pour n_1 différent de 0, on avait qu'une de ces représentations avait pour quotient la représentation $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \rho'$ on aurait que ρ' est quotient de $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \omega_2$ où on a fait le produit de $n_1 > 0$ fois la représentation $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$ ce qui contredit la maximalité de b.

Ainsi, on a bien

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{ind}_{P'_{ra,b-ra}}^{G'_{rb}}\Big(\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\overline{r'}_{rb-ra,m-rb}\left(\sigma_{n-ra,m-ra}\right)\nu^{\frac{-ra}{2}}\Big), \\ \rho \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \rho'\Big) \neq 0.$$

4.4.3. D'après le corollaire 4.3.2, il existe alors $i \in \{0, \ldots, rb-ra\}$ tel que

$$\mathrm{Hom}\left(\overline{\tau'_i}, \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\rho'\right) \neq 0.$$

Le lemme suivant se montre comme le lemme 4.4.1

Lemme. *Les seuls $\overline{\tau'}_i$ qui peuvent avoir des quotients de la forme ci-dessus sont $\overline{\tau'}_{rb-ra}$ et $\overline{\tau'}_{rb-ra-1}$. Or, si $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \neq \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}$, i.e. si $\chi \neq \nu^{\frac{n+1}{2}}$ seulement $\overline{\tau'}_{rb-ra}$ peut en avoir.*

Démonstration. En effet, supposons que

$$\mathrm{Hom}\left(\overline{\tau'}_i, \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\rho'\right) \neq 0$$

Cela signifie

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{ind}_{P'_{i,rb-ra-i}\times G'_{m-ra}}^{M'_{rb-ra,m-ra}}\left(\sigma_{n-ra-i,m-ra} \otimes \rho_i \otimes \overline{\xi'}_{rb-ra,i}\right), \\ \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\rho'\Big) \neq 0$$

et, par 2.1.4(b),

$$\mathrm{Hom}\Big(\sigma_{n-ra-i,m-ra} \otimes \rho_i \otimes \overline{\xi'}_{rb-ra,i}, \\ \overline{r}_{P'_{i,rb-ra-i}\times G'_{m-ra}}^{M'_{rb-ra,m-ra}}\left(\nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\rho'\right)\Big) \neq 0,$$

d'où

$$\mathrm{Hom}\left(\rho_i \otimes \overline{\xi'}_{rb-ra,i}|_{M_{rb-ra-i,i}}, \overline{r}_{P_{rb-ra-i,i}}^{G_{rb-ra}}\left(\nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi}\right)\right) \neq 0,$$

Ainsi, on trouve finalement

$$\mathrm{Hom}\left(\nu_{rb-ra-i}^{\frac{2m-n+2ra-rb+i}{2}}, \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi}\right) \neq 0.$$

Par l'unicité du support cuspidal, il faut alors que

$$\operatorname{supp}\left(\nu_{rb-ra-i}^{\frac{2m-n+2ra-rb+i}{2}}\right) \subset \left\{\nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi}\right\}$$

et donc, ou bien $i = rb - ra$ ou bien $i = rb - ra - 1$ et $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} = \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}$, *i.e.* $\chi = \nu^{\frac{n+1}{2}}$. □

4.4.4. Ainsi on a, à nouveau, deux cas :

<u>Cas A.1</u> Ou bien

$$\operatorname{Hom}\left(\overline{\tau'}_{rb-ra}, \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\rho'\right) \neq 0$$

(ce qui arrive, en particulier, d'après le lemme précédent si $\chi \neq \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}$ et $\chi \neq \nu^{\frac{n+1}{2}}$).

<u>Cas A.2</u> Ou bien

$$\operatorname{Hom}\left(\overline{\tau'}_{rb-ra-1}, \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+ra}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\rho'\right) \neq 0$$

(dans ce cas il faut que $\chi = \nu^{\frac{n+1}{2}}$).

Regardons d'abord le cas A.1.

Lemme. *Dans le cas A.1, on a $b = a$.*

Démonstration. Si $\chi \neq \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}$ et $\chi \neq \nu^{\frac{n+1}{2}}$, d'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}\Big(\operatorname{ind}_{P'_{ra,rb-ra}}^{G'_{rb}} & \left(\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\overline{\tau'}_{rb-ra}\nu^{\frac{-ra}{2}}\right), \\ & \rho \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \rho'\Big) \neq 0\end{aligned}$$

d'où, par définition de $\overline{\tau'}_{rb-ra}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}\Big(\operatorname{ind}_{P_{n-rb,rb-ra}}^{G_{n-ra}} & \left(\nu^{\frac{rb-ra}{2}}\sigma_{n-rb,m-rb}\nu^{\frac{-rb+ra}{2}} \otimes \nu^{\frac{-ra}{2}}\chi \times \cdots \times \nu^{\frac{-ra}{2}}\chi\right), \\ & \nu^{\frac{-ra}{2}}\rho \otimes \nu^{\frac{ra}{2}}\rho'\Big) \neq 0,\end{aligned}$$

où on a fait le produit de $b - a$ fois la représentation $\nu^{\frac{-ra}{2}}\chi$, et donc, par maximalité de a et le corollaire 3.2.8 on a $b = a$. □

4.4.5. Avant de passer aux autres cas, résumons les résultats obtenus en une proposition.

Proposition. *Soient $\pi \in \operatorname{Irr} G_n$, $\pi' \in \operatorname{Irr} G_m$ telles que $\pi \otimes \pi'$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$. Soit aussi*

$$\chi \neq \begin{cases} \nu^{\frac{n+1}{2}} \\ \nu^{\frac{2m-n+1}{2}} \end{cases}$$

une représentation irréductible cuspidale de G_r. Alors $a = b$ où a et b sont définis par les conditions suivantes :

1. *Il existe $\rho \in \operatorname{Irr}(G_{n-ra})$ avec*

$$\pi \hookrightarrow \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \times \rho,$$

où on a fait le produit de a fois la représentation cuspidale χ et a est maximal.

2. *Il existe $\rho' \in \operatorname{Irr}(G'_{m-rb})$ avec*

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\chi},$$

où on a fait le produit de b fois la représentation cuspidale $\nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\chi}$ et b est maximal.

De plus, on a

$$\operatorname{Hom}\left(\sigma_{n-ra,m-ra}, \nu^{\frac{-ra}{2}} \rho \otimes \nu^{\frac{ra}{2}} \rho'\right) \neq 0.$$

4.5 Exemple : correspondance $GL(1), GL(m)$

Avant de continuer avec les autres cas possibles et afin de pouvoir démarrer une récurrence calculons déjà explicitement la correspondance dans le cas $(GL(1), GL(m))$. Soit χ une représentation irréductible de G_1. On se propose donc de calculer ici les représentations irréductibles $\theta_{1,m}(\chi)$ de G_m telles que $\chi \otimes \theta_{1,m}(\chi)$ soit un quotient de $\sigma_{1,m}$.

4.5.1. Supposons d'abord que l est banal et $D = F$ ou bien que $R = \mathbb{C}$.

Si $\chi \neq \begin{cases} \nu^m \\ \nu, \end{cases}$ d'après 4.4.5 on a :

$$\theta_{1,m}(\chi) \hookrightarrow \nu^{\frac{(-1)}{2}} 1_{m-1} \times \nu^{\frac{(m-1)}{2}} \chi^{-1}. \tag{a}$$

Or, avec les notations du chapitre 2, $\nu^{\frac{(-1)}{2}} 1_{m-1} = \left\langle \left\{\nu^{\frac{-(m-1)}{2}}\right\}, \ldots, \left\{\nu^{\frac{m-3}{2}}\right\} \right\rangle^t$ et on trouve en utilisant (a) que, dans ces cas

$$\theta_{1,m}(\chi) = \left\langle \left\{\nu^{\frac{-(m-1)}{2}}\right\}, \ldots, \left\{\nu^{\frac{m-3}{2}}\right\}, \left\{\nu^{\frac{(m-1)}{2}} \chi^{-1}\right\} \right\rangle^t$$

Dans les autres deux cas, d'après 4.2.4, $\theta_{1,m}(\chi)$ est le quotient de $\nu^{\frac{(-1)}{2}}1_{m-1}\times \nu^{\frac{(m-1)}{2}}\chi^{-1}$.

Si $\chi=\nu$, il n'y a pas de problème car, dans ce cas, $\nu^{\frac{(m-1)}{2}}\chi^{-1}=\nu^{\frac{(m-3)}{2}}$ et donc $\nu^{\frac{(-1)}{2}}1_{m-1}\times\nu^{\frac{(m-1)}{2}}\chi^{-1}$ est irréductible d'où, à nouveau :

$$\theta_{1,m}(\chi)=\left\langle \left\{\nu^{\frac{-(m-1)}{2}}\right\},\ldots,\left\{\nu^{\frac{m-3}{2}}\right\},\left\{\nu^{\frac{(m-1)}{2}}\chi^{-1}\right\}\right\rangle^t$$

4.5.2. Que se passe-t-il lorsque $\chi=\nu^m$? On sait que $\theta_{1,m}(\chi)$ est un sous-quotient de $\nu^{\frac{(-1)}{2}}1_{m-1}\times\nu^{\frac{(m-1)}{2}}\chi^{-1}$, *i.e.*

1. ou bien $\theta_{1,m}(\chi)=\pi_1=\left\langle \left\{\nu^{\frac{(-m-1)}{2}},\nu^{\frac{-(m-1)}{2}},\right\},\left\{\nu^{\frac{-(m-3)}{2}}\right\},\ldots,\left\{\nu^{\frac{m-3}{2}}\right\}\right\rangle^t$;
2. ou bien $\theta_{1,m}(\chi)=\pi_2=\left\langle \left\{\nu^{\frac{(-m-1)}{2}}\right\},\ldots,\left\{\nu^{\frac{m-3}{2}}\right\}\right\rangle^t$.

Or, $\overline{\mathrm{Jac}}_{\frac{(-m+1)}{2}}(\pi_1)\neq\emptyset$, d'après 2.2.5.2, et donc, par (4.4.5), on aurait que $\chi\hookrightarrow\nu^{m-1}$, ce qui est absurde.

On a donc que $\theta_{1,m}(\nu^m)=\pi_2$, *i.e.* $\theta_{1,m}$ est le caractère ν^{-1} de G_m.

Que se passe-t-il lorsque l est non banal, si, par exemple, $q^m\equiv 1 \mod l$ et $\chi=1$?

Si, de plus, $q\not\equiv 1 \mod l$ (d'où $m\geq 2$), on a que $\theta_{1,m}(\chi)$ n'est pas bien définie. En effet les applications :

1. $f\mapsto f(0)$
2. $f\mapsto \int_{F^m} f(x)dx$

de $S(F^m)$ vers R induisent des entrelacements de $\sigma_{1,m}$ vers $1_1\otimes 1_m$ et vers $1_1\otimes\nu^{-1}1_m$ respectivement.

4.6 La démonstration

Dans cette section on suppose que le théorème 4.1.2 est vrai pour toute paire (G_i,G_j), où $ij<nm$ et on le montre pour la paire (G_n,G_m).

4.6.1. On suppose d'abord qu'il existe $\chi\neq\begin{cases}\nu^{\frac{n+1}{2}}\\ \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}\end{cases}$ une représentation cuspidale, $\mathrm{gr}(\chi)=r$, telle que l'une des conditions suivantes équivalentes (par la proposition 4.4.5) soit satisfaite :

1. Il existe $\rho\in\mathrm{Irr}(G_{n-r})$ avec $\pi\hookrightarrow\chi\times\rho$,
2. ou bien, il existe $\rho'\in\mathrm{Irr}(G'_{m-r})$ avec $\pi'\hookrightarrow\rho'\times\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$,

Ainsi on est bien dans le cas A.1.

Soient donc $\pi \in \operatorname{Irr} G_n$, $\pi' \in \operatorname{Irr} G_m$ telles que $\pi \otimes \pi'$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$, et soient χ et ρ, $\chi \neq \begin{cases} \nu^{\frac{n+1}{2}} \\ \nu^{\frac{2m-n+1}{2}} \end{cases}$ avec

$$\pi \hookrightarrow \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \times \rho,$$

où on a fait le produit de a fois la représentation χ, a maximal. D'après la proposition 4.4.5 il existe un unique $\rho' \in \operatorname{Irr}(G'_{m-ra})$ avec

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\chi},$$

où on a fait le produit de a fois la représentation $\nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\chi}$. D'après 3.1.1, π' est unique. De plus, on a

$$\operatorname{Hom}\left(\sigma_{n-ra,m-ra}, \nu^{\frac{-ra}{2}} \rho \otimes \nu^{\frac{ra}{2}} \rho'\right) \neq 0.$$

Ainsi $\nu^{\frac{-ra}{2}} \rho \otimes \nu^{\frac{ra}{2}} \rho'$ est une représentation irréductible quotient de la représentation métaplectique et $\operatorname{gr}(\rho) \operatorname{gr}(\rho') < nm$. Par hypothèse de récurrence on a que

$$\begin{aligned} &\dim\left(\operatorname{Hom}\left(\sigma_{n-ra,m-ra}, \nu^{\frac{-ra}{2}} \rho \otimes \nu^{\frac{ra}{2}} \rho'\right)\right) = 1 \\ &\rho' = \left\langle \nu^{-\frac{n}{2} - \frac{m-n-1}{2}}, \ldots, \nu^{-\frac{n}{2} + \frac{m-n-1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t, \end{aligned}$$

si $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t$.

On a donc

$$\begin{aligned} \pi &\hookrightarrow \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \times \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t \\ \pi' &\hookrightarrow \left\langle \nu^{-\frac{n}{2} - \frac{m-n-1}{2}}, \ldots, \nu^{-\frac{n}{2} + \frac{m-n-1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t \times \\ &\qquad \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\chi}. \end{aligned}$$

Lemme. *Dans ces conditions, π et π' sont paramétrées comme dans le théorème 4.1.2.*

Démonstration. Par récurrence sur a. Si $a = 1$, puisque $\chi \neq \begin{cases} \nu^{\frac{n+1}{2}} \\ \nu^{\frac{2m-n+1}{2}} \end{cases}$, on vérifie bien les conditions du corollaire 3.3.2 ce qui montre le lemme dans ce cas.

Supposons $a > 1$ et le lemme vrai pour $i < a$. Par 3.1.1, π et π' sont les uniques représentations irréductibles qui vérifient aux conditions

$$\begin{array}{rcl} \pi & \hookrightarrow & \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \times \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t \\ \pi' & \hookrightarrow & \left\langle \nu^{-\frac{n}{2}-\frac{m-n-1}{2}}, \ldots, \nu^{-\frac{n}{2}+\frac{m-n-1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t \times \\ & & \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}, \end{array}$$

où on a fait le produit de a fois la représentation χ (resp. $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$).

Notons π_1 et π_1' les représentations irréductibles définies par les conditions

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & \hookrightarrow & \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \times \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t \\ \pi_1' & \hookrightarrow & \left\langle \nu^{-\frac{n}{2}-\frac{m-n-1}{2}}, \ldots, \nu^{-\frac{n}{2}+\frac{m-n-1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t \times \\ & & \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}, \end{array}$$

où on a fait le produit de $a-1$ fois la représentation χ (resp. $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$).

Par hypothèse de récurrence on a bien que π_1 et π_1' sont paramétrées comme dans le théorème 4.1.2. De plus, on a

$$\begin{array}{rcl} \pi & \hookrightarrow & \chi \times \pi_1 \\ \pi' & \hookrightarrow & \pi_1' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}, \end{array}$$

et donc, à nouveau par le corollaire 3.3.2 on a que π et π' sont paramétrées comme dans le théorème 4.1.2. □

4.6.2. On s'est ramené donc aux cas où π et π' sont des représentations très particulières, des représentations vérifiant les propriétés suivantes :

J.1 Si $\mathrm{Jac}_\chi(\pi) \neq 0$ et χ cuspidale, alors $\chi \in \left\{\nu^{\frac{n+1}{2}}, \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}\right\}$,

J.2 si $\overline{\mathrm{Jac}}_\chi(\pi') \neq 0$ et χ cuspidale, alors $\chi \in \left\{\nu^{\frac{-m-1}{2}}, \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}\right\}$.

Dans ce paragraphe, on va supposer $n \neq m$. On laisse le cas $n = m$ pour la section suivante.

Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ telle que $\mathrm{Jac}_{\nu^{\frac{n+1}{2}}}(\pi) \neq 0$. Soit a maximal tel que

$$\pi \hookrightarrow \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \times \rho,$$

où on a fait le produit de a fois le caractère $\chi = \nu^{\frac{n+1}{2}}$. On se trouve (puisque $\nu^{\frac{n+1}{2}} \neq \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}$ car $n \neq m$, le corps R étant de caractéristique banale), d'après la section 4.4, dans le cas A. On rappelle que l'on a deux possibilités :

A.1 Ou bien, il existe $\rho' \in \mathrm{Irr}(G'_{m-a})$ avec

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1},$$

où on a fait le produit de a fois le caractère $\nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1}$, a maximal et

$$\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a}, \nu^{\frac{-a}{2}}\rho \otimes \nu^{\frac{a}{2}}\rho'\right) \neq 0$$

(proposition 4.4.5) ;

Par hypothèse de récurrence, on a que :

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-2n-1}{2}} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}, \text{ et} \qquad \text{(a)}$$
$$\rho' = \left\langle \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}, \ldots, \nu^{\frac{-m+1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t,$$

si $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t$.

Lemme. *Il n'existe pas des représentations irréductibles π et π' satisfaisant aux conditions J.1, J.2 et* (a).

Démonstration. D'après J.1, on sait que, si $\mathrm{Jac}_\chi(\pi) \neq 0$ et χ cuspidale, alors $\chi \in \left\{\nu^{\frac{n+1}{2}}, \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}\right\}$. Par 2.2.5.2, tous les segments de ρ finissent alors par $e_i \geq \frac{n+1}{2}$. Ainsi, par définition de ρ', tous les segments de ρ' commencent alors par $b'_i \leq \frac{m-2n-1}{2}$. Puisque $m \neq n$, $\left\{\nu^{\frac{m-2n-1}{2}}\right\}$ est un segment de ρ' et donc, par 2.2.5.2 et 3.2.7.1, il existe $\tau' \in \mathrm{Irr}(G_{m-a-1})$ tel que $\rho' \hookrightarrow \tau' \times \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}$ ce qui contredit la maximalité de a. □

A.2 Alors on a bien (avec les notations de 4.4.5)

$$\mathrm{Hom}\left(\overline{\tau'}_{b-a-1}, \nu^{\frac{m-n+a}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n+a}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{a}{2}}\rho'\right) \neq 0.$$

Dans ce cas on a une proposition similaire à la proposition 4.4.5

Proposition. *Soient $\pi \in \mathrm{Irr}\, G_n$, $\pi' \in \mathrm{Irr}\, G_m$ telles que $\pi \otimes \pi'$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$ satisfaisant aux conditions J.1 et J.2. Soit aussi $\chi = \nu^{\frac{n+1}{2}}$ un caractère de G_1. Alors $a = b - 1$ où a et b sont définis par les conditions suivantes :*

1. *Il existe $\rho \in \mathrm{Irr}(G_{n-a})$ avec*

$$\pi \hookrightarrow \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \times \rho,$$

où on a fait le produit de a fois le caractère χ et a est maximal.

2. Il existe $\rho' \in \mathrm{Irr}(G'_{m-b})$ *avec*

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi},$$

où on a fait le produit de b *fois le caractère* $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi}$ *et* b *est maximal. De plus, on a*

$$\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a-1}, \nu^{\frac{-a}{2}-1}\rho \otimes \nu^{\frac{a+1}{2}}\rho'\right) \neq 0.$$

Démonstration. On a que

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{ind}_{P'_{a,b-a}}^{G'_b} \left(\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \nu^{\frac{a}{2}}\overline{\tau'}_{b-a-1}\nu^{\frac{-a}{2}}\right), \\ \rho \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\chi} \otimes \rho'\Big) \neq 0,$$

d'où, par définition de $\overline{\tau'}_{b-a-1}$,

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{ind}_{P_{n-b-1,b-a-1}}^{G_{n-a}} \left(\nu^{\frac{b+1}{2}}\sigma_{n-b+1,m-b}\nu^{\frac{-b}{2}} \otimes \nu^{\frac{-a}{2}}\chi \times \cdots \times \nu^{\frac{-a}{2}}\chi\right), \\ \rho \otimes \rho'\Big) \neq 0,$$

où on a fait le produit de $b-a-1$ fois le caractère $\nu^{\frac{-a}{2}}\chi$, et donc, par maximalité de a et le corollaire 3.2.8 on a $b = a+1$.

□

Ainsi, il existe $\rho' \in \mathrm{Irr}(G'_{m-a-1})$ avec

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1},$$

où on a fait le produit de $a+1$ fois le caractère $\nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1}$, a maximal et

$$\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a-1}, \nu^{\frac{-a}{2}-1}\rho \otimes \nu^{\frac{a+1}{2}}\rho'\right) \neq 0.$$

Alors, par hypothèse de récurrence on a

$$\dim\left(\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a-1}, \nu^{\frac{-a}{2}-1}\rho \otimes \nu^{\frac{a+1}{2}}\rho'\right)\right) = 1,$$
$$\rho' = \left\langle \nu^{\frac{m-2n-3}{2}}, \ldots, \nu^{\frac{-m+1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t.$$

si $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t$.

Lemme. *Supposons que π et π' sont deux représentation irréductibles qui satisfont aux conditions J.1, J.2 et*

$$\begin{array}{l}
\dim\left(\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a-1}, \nu^{\frac{-a}{2}-1}\rho\otimes\nu^{\frac{a+1}{2}}\rho'\right)\right)=1,\\
\pi\hookrightarrow\nu^{\frac{n+1}{2}}\times\cdots\times\nu^{\frac{n+1}{2}}\times\rho\\
\textit{où on a fait le produit de } a \textit{ fois le caractère } \nu^{\frac{n+1}{2}},\\
\pi'\hookrightarrow\rho'\times\nu^{\frac{m-2n-1}{2}}\times\cdots\times\nu^{\frac{m-2n-1}{2}},\\
\textit{où on a fait le produit de } a+1 \textit{ fois le caractère } \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}\chi^{-1}\\
\textit{et } \rho'=\left\langle\nu^{\frac{m-2n-3}{2}},\ldots,\nu^{\frac{-m+1}{2}},\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1},\ldots,\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N}\right\rangle^t.
\end{array}$$

si $\rho=\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_N\rangle^t$.

Alors π et π' vérifient la conclusion du théorème 4.1.2.

Démonstration. Par récurrence sur a, on va montrer que si l'on définit π_1' par

$$\pi_1'\hookrightarrow\rho'\times\nu^{\frac{m-2n-1}{2}}\times\cdots\times\nu^{\frac{m-2n-1}{2}},$$

où on a fait le produit de a fois le caractère $\nu^{\frac{m-2n-1}{2}}$, alors

$$\pi_1'=\left\langle\nu^{\frac{m-2n-3}{2}},\ldots,\nu^{\frac{-m+1}{2}},\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1'},\ldots,\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N'}\right\rangle^t$$

si $\pi=\langle\Delta_1',\ldots,\Delta_N'\rangle^t$.

Si $a=0$, c'est clair. Supposons $a>0$ et notons π_2 et π_2' les représentations irréductibles définies par les conditions

$$\begin{array}{rcl}
\pi_2 & \hookrightarrow & \nu^{\frac{n+1}{2}}\times\cdots\times\nu^{\frac{n+1}{2}}\times\langle\Delta_1,\ldots,\Delta_N\rangle^t\\
\pi_2' & \hookrightarrow & \left\langle\nu^{-\frac{n}{2}-\frac{m-n-1}{2}},\ldots,\nu^{-\frac{n}{2}+\frac{m-n-1}{2}},\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1},\ldots,\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N}\right\rangle^t\times\\
 & & \times\nu^{\frac{m-2n-1}{2}}\times\cdots\times\nu^{\frac{m-2n-1}{2}},
\end{array}$$

où on a fait le produit de $a-1$ fois les caractères $\nu^{\frac{n+1}{2}}$, $\nu^{\frac{m-2n-1}{2}}$ respectivement.

Par hypothèse de récurrence on a bien que π_2 et π_2' sont paramétrées comme dans le lemme. De plus, on a

$$\begin{array}{rcl}
\pi & \hookrightarrow & \nu^{\frac{n+1}{2}}\times\pi_2\\
\pi_1' & \hookrightarrow & \pi_2'\times\nu^{\frac{m-2n-1}{2}},
\end{array}$$

et donc, par le corollaire 3.3.2 on a que π et π' sont de la forme requise.

Il nous reste à voir que π' est paramétrée comme dans le theorème 4.1.2.

Puisque d'après J.1, on sait que, si $\mathrm{Jac}_\chi(\pi) \neq 0$ et χ cuspidale, alors $\chi \in \left\{\nu^{\frac{n+1}{2}}, \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}\right\}$. Par 2.2.5.2, tous les segments de la forme Δ' finissent alors par $e_i \geq \frac{n+1}{2}$. Ainsi, tous les segments de la forme $\nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta'_i}$ commencent par $b'_i \leq \frac{m-2n-1}{2}$ et, a fortiori, tous les segments de π' commencent par $b'_i \leq \frac{m-2n-1}{2}$.

Ainsi, puisque

$$\pi' \hookrightarrow \pi'_1 \times \nu^{\frac{m-2n-1}{2}},$$

et

$$\pi' = \left\langle \nu^{\frac{m-2n-3}{2}}, \ldots, \nu^{\frac{-m+1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta'_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta'_N} \right\rangle^t,$$

on a, par 3.2.7, que

$$\pi' = \left\langle \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}, \nu^{\frac{m-2n-3}{2}}, \ldots, \nu^{\frac{-m+1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t.$$

□

4.6.3. Ainsi il ne nous reste qu'à traiter les cas où π et π' sont des représentations vérifiant les propriétés suivantes :

H.1 Si $\mathrm{Jac}_\chi(\pi) \neq 0$ et χ cuspidale, alors $\chi = \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}$,

H.2 si $\overline{\mathrm{Jac}}_\chi(\pi') \neq 0$ et χ cuspidale, alors $\chi = \nu^{\frac{-m-1}{2}}$.

En effet, le calcul du paragraphe précédent est valable pour toute représentation π telle que $\mathrm{Jac}_{\nu^{\frac{n+1}{2}}}(\pi) \neq 0$ et quand $a = 0$, pour toute représentation π' telle que $\mathrm{Jac}_{\nu^{\frac{m-2n11}{2}}}(\pi') \neq 0$.

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante :

Proposition. *Il n'existe pas de représentations irréductibles π et π' satisfaisant aux conditions H.1 et H.2, dont le produit tensoriel est quotient de la représentation métaplectique si l'on suppose de plus $n \neq m$.*

Soit $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ vérifiant H.1 et soit a maximal tel que

$$\pi \hookrightarrow \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \times \rho,$$

où on a fait le produit de a fois le caractère $\chi = \nu^{\frac{2m-n+1}{2}}$. On a alors, d'après les résultats de la section 4.4, que

Cas A Ou bien, $\mathrm{Hom}\left(\tau_a, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi'\right) \neq 0$,

Cas B ou bien, $\mathrm{Hom}\left(\tau_{a-1}, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi'\right) \neq 0$.

C'est à dire :

Cas A Puisque $m \neq n$ on est bien dans le cas A.1 et donc, d'après 4.4.5, il existe $\rho' \in \mathrm{Irr}(G'_{m-a})$ avec

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1},$$

où on a fait le produit de a fois le caractère $\nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1}$, a maximal et

$$\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a}, \nu^{\frac{-a}{2}}\rho \otimes \nu^{\frac{a}{2}}\rho'\right) \neq 0.$$

Ceci n'est pas possible. En effet, par récurrence, on a que :

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{-m-1}{2}} \times \cdots \times \nu^{\frac{-m-1}{2}},$$

et

$$\rho' = \left\langle \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}, \ldots, \nu^{\frac{-m+1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t$$

si $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t$.

Il y a ainsi des segments de π' commençant par $x_i > \frac{-m-1}{2}$ ce qui, par 2.2.5.2, contredit H.2.

Cas B Sinon montrons qu'il existe $\rho' \in \mathrm{Irr}(G'_{m-a+1})$ avec

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1},$$

où on a fait le produit de $a-1$ fois le caractère $\nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1}$, a maximal et

$$\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a+1}, \nu^{\frac{-a}{2}}\rho \otimes \nu^{\frac{a+1}{2}}\rho'\right) \neq 0.$$

En effet, $\mathrm{Hom}\left(\tau_{a-1}, \chi \times \chi \times \cdots \times \chi \otimes \rho \otimes \pi'\right) \neq 0$ implique que

$$\mathrm{Hom}\left(\mathrm{ind}_{P'_{a-1,m-a+1}}^{G'_m}\Big(\nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \otimes \nu^{\frac{a}{2}}\sigma_{n-a,m-a+1}\nu^{\frac{-a-1}{2}}\Big), \rho \otimes \pi'\right) \neq 0.$$

Soit b maintenant maximal tel qu'il existe une représentation irréductible ρ' de G_{m-b} avec π' quotient de

$$\nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \rho'$$

où on a fait le produit de b fois le caractère $\nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1}$. D'après le corollaire 3.2.8 on a

$$\overline{r'}_{b,m-b}(\pi') \hookrightarrow \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \otimes \rho'.$$

Puisque $\chi \neq \nu^{\frac{n+1}{2}}$, on montre, comme dans 4.4.5, que $b = a-1$ et donc

$$\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a+1}, \nu^{\frac{-a}{2}}\rho \otimes \nu^{\frac{a+1}{2}}\rho'\right) \neq 0.$$

Ainsi, il existe $\rho' \in \mathrm{Irr}(G'_{m-a+1})$ avec

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1},$$

où on a fait le produit de $a-1$ fois le caractère $\nu^{\frac{m-n}{2}}\chi^{-1}$, a maximal et

$$\mathrm{Hom}\left(\sigma_{n-a,m-a+1}, \nu^{\frac{-a}{2}}\rho \otimes \nu^{\frac{a+1}{2}}\rho'\right) \neq 0.$$

Alors, par hypothèse de récurrence on a

$$\pi' \hookrightarrow \rho' \times \nu^{\frac{-m-1}{2}} \times \cdots \times \nu^{\frac{-m-1}{2}},$$

et

$$\rho' = \left\langle \nu^{\frac{m-2n-1}{2}}, \ldots, \nu^{\frac{-m-1}{2}}, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_1}, \ldots, \nu^{\frac{m-n}{2}}\widetilde{\Delta_N} \right\rangle^t$$

si $\rho = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_N \rangle^t$. On achève la démonstration, dans ce cas, avec le corollaire 3.3.2. Si $n \neq m$, on trouve ainsi des segments de π' commençant par $x_i > \frac{-m-1}{2}$ ce qui, à nouveau par 2.2.5.2, contredit H.2.

4.7 Correspondance $GL(n), GL(n)$: fin de la preuve

Dans la section précédente, on utilisait l'hypothèse $m \neq n$ pour pouvoir affirmer, à la fin de nos calculs, que deux cas (A.1 et A.2, A ou B) n'était pas compatibles. Ceci nous permettait d'affirmer que

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_n}\left(\sigma_{n,n}, \pi \otimes \widetilde{\pi}\right)\right) = 1.$$

Si $n = m$, on a que $2m - n + 1 = n + 1$. Ainsi, il ne nous reste à montrer qu'un cas très particulier, celui où si $\overline{\mathrm{Jac}}_\chi(\pi) \neq 0$ et χ cuspidale, alors $\chi = \nu^{\frac{n+1}{2}}$. On peut, miraculeusement, utiliser le théorème 4.2.4. En effet, avec cette hypothèse il n'existe pas $\tau \in \mathrm{Irr}(G_k)$, $k < n$, avec

$$\mathrm{Hom}_{G_n}\left(\mathrm{ind}_{P_k}^{G_m}\left(\nu^{\frac{k}{2}}1_{n-k} \otimes \nu^{\frac{-n+k}{2}}\tau\right), \pi\right) \neq 0.$$

Le théorème 4.2.4 s'applique alors, et on trouve que $\pi = \widetilde{\pi}'$ et

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_n}\left(\sigma_{n,n}, \pi \otimes \widetilde{\pi}\right)\right) = 1.$$

Ainsi, on a finalement montré dans tous les cas le théorème 4.1.2.

4.8 Quelques remarques

Au chapitre 2, dans le cas $R = \overline{\mathbb{F}_l}$, l banal et $D = F$, on avait étudié le comportement des classifications de Langlands et Zelevinskii par rapport à la réduction modulo l. On en tire ici des conséquences non triviales sur le comportement de la correspondance thêta par rapport à la réduction modulo l :

Proposition 4.8.1. *Supposons $R = \overline{\mathbb{F}_l}$, l banal et $D = F$. Soit $\pi \in \operatorname{Irr} G_n$ une $\overline{\mathbb{Q}_l}$-représentation l-irréductible et $\pi' \in \operatorname{Irr} G_m$ une autre $\overline{\mathbb{Q}_l}$-représentation telles que $\pi \otimes \pi'$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$. Alors il existe $\overline{\pi''} \in r_l(\pi')$ une $\overline{\mathbb{F}_l}$-représentation irréductible telle que $r_l(\pi) \otimes \overline{\pi''}$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$ en tant que $\overline{\mathbb{F}_l}$-représentations.*

Démonstration. Ça découle du théorème 4.1.2. En effet on connaît, par le théorème 4.1.2, les paramètres de Langlands de $\theta(\pi)$ et de $\theta(r_l(\pi))$ et par 2.3.12 on sait que $\theta(r_l(\pi)) \in r_l(\theta(\pi))$. □

Remarque 4.8.2.
1. Il peut exister $\overline{\pi''} \in r_l(\pi')$ telle que $\pi \otimes \overline{\pi''}$ ne soit pas un quotient de $\sigma_{n,m}$ en tant que $\overline{\mathbb{F}_l}$-représentations.
2. Si l est non-banal et $\overline{\pi} \in \operatorname{Irr} G_n$ et $\overline{\pi'} \in \operatorname{Irr} G_m$ sont des $\overline{\mathbb{F}_l}$-représentations telles que $\overline{\pi} \otimes \overline{\pi'}$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$ en tant que $\overline{\mathbb{F}_l}$-représentations, il peut ne pas y avoir de relèvements π de $\overline{\pi}$ et π' de $\overline{\pi'}$ tel que $\pi \otimes \pi''$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$. (Voir l'exemple de la fin de la section 4.5.)

Remarque 4.8.3. Si l est non banal et $\pi \in \operatorname{Irr}(G_n)$ est une représentation cuspidale n'appartenant pas à la droite de la représentation triviale de G_1, alors il existe une unique représentation $\pi' \in \operatorname{Irr} G_m$ telle que $\pi \otimes \pi'$ soit un quotient de $\sigma_{n,m}$. En effet c'est le même calcul que celui de la section 4.5.

Chapitre 5

Fonctions zêta

5.1 Réduction du problème

Dans ce chapitre on note toujours R un corps algébriquement clos de caractéristique $l \neq p$. Le but de ce chapitre est d'associer à chaque l-représentation irréductible π de G_n, deux invariants $L(T,\pi)$, $\varepsilon(T,\pi,\psi)$ où T est une variable et ψ est un caractère non trivial de F. La *fonction* L, $L(T,\pi)$, est une fonction de la forme $\frac{1}{P(T)}$ où $P \in R[T]$ un polynôme de degré au plus n tel que $P(0) = 1$. Le *facteur epsilon*, $\varepsilon(T,\pi,\psi)$, est une autre fonction simple de la forme AT^k, avec $A \in R$ et $k \in \mathbb{Z}$. On établit également l'existence d'un entrelacement non trivial entre la représentation métaplectique $\sigma_{n,n}$ et $\pi \otimes \widetilde{\pi}$ pour toute représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ qui a été utilisé au chapitre précédent.

Les fonctions zêta, quand $R = \mathbb{C}$, furent d'abord introduites par Godement et Jacquet dans [GJ] et elles généralisaient les fonctions L de Tate [Tat] quand $n = 1$, qu'on a déjà vues au premier chapitre, et les fonctions L définies dans [JL, §13] quand $n = 2$.

5.1.1. On conserve les notations des chapitres précédents, F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, D une algèbre à division de centre F, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, $\mathcal{P}$ son idéal maximal, $k_D = \mathcal{O}/\mathcal{P}$ son corps résiduel et q le cardinal de k_D, m un entier positif, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(m,D)$, $G = \mathcal{M}^\times \simeq GL(m,D)$. Si d^2 est le rang de D sur F on pose $n = md$. On regarde G comme un groupe algébrique réductif défini sur F ou bien comme le groupe de ses F-points. On fixe aussi une racine carrée $q^{1/2}$ de q dans $R^\times$,

On note :

$\mathrm{Nrd}_{\mathcal{M}_n} : \mathcal{M} \to F$	la norme réduite
$\tau_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to F$	la trace réduite.

On pose aussi pour simplifier les notations $\nu(g) = |\mathrm{Nrd}_{\mathcal{M}_n}(g)|_F$, pour tout $g \in G_n$.

Soit $d\mu(x)$ une mesure de Haar sur $\mathcal{M}$ à valeurs dans R et $d\mu^\times(x)$ une mesure de Haar sur G. Puisque $l \neq p$, il en existe toujours, et elles sont uniques à une constante dans $R^\times$ près (*cf.* 2.1.2).

5.1.2. Fixons $\psi : F \to R^\times$ un caractère non trivial de F comme dans le chapitre 1. On rappelle que le niveau de ψ est le plus petit entier k tel que ψ soit trivial sur $\mathcal{P}^k$. Tout caractère de F peut s'écrire alors sous la forme ψ_a, avec $a \in F$ et $\psi_a(x) = \psi(ax)$. Pour toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$, on note $\widehat{\Phi}(x) = \int_{\mathcal{M}} \Phi(y)\, \tau_{\mathcal{M}}(\psi(xy))\, d\mu(y)$ sa transformée de Fourier.

La proposition ci-dessous se montre comme la proposition 1.2.2 :

Proposition. *1. Pour toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$, on a $\widehat{\Phi} \in S_R(\mathcal{M})$.*

2. Il existe $c = c(\mu, \psi) \in R$ tel que pour toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$,

$$\widehat{\widehat{\Phi}}(x) = c\Phi(-x).$$

3. Pour ψ fixé, il existe une unique mesure de Haar μ_ψ, qui vérifie

$$\mu_\psi(\mathcal{M}(\mathcal{O})) = q^{n^2k/2},$$

où k est le niveau de ψ et on a $c(\mu_\psi, \psi) = 1$.

4. Pour tout $a \in F^\times$, $\mu_{a\psi} = |a|^{n^2/2} \mu_\psi$.

La mesure μ_ψ est dite *auto-duale*. On suppose dans tout ce chapitre que la mesure est auto-duale.

5.1.3. Soit π une représentation admissible de G dans un R-espace vectoriel V. On rappelle qu'un coefficient de π est une fonction $f : G \to R$ de la forme $f(x) = \langle \pi(x)\, v, \widetilde{v} \rangle$ où $v \in V, \widetilde{v} \in \widetilde{V}$ sont fixés, ou une combinaison linéaire de telles fonctions. On note $\check{f}$ le coefficient de $\widetilde{\pi}$ défini par $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Pour tout coefficient $f : G \to R$, toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$ et tout $N \in \mathbb{Z}$ l'intégrale

$$\int_{G, \nu(x) = q^{-N}} \Phi(x)\, f(x)\, d\mu^\times(x)$$

est bien définie. En effet $\left\{x \in G_F : \nu(x) = q^{-N}\right\} \cap \mathrm{supp}(\Phi)$ est une partie compacte de G et Φ et f sont localement constants sur cette partie.

On peut alors définir la somme formelle :

$$Z(\Phi, T, f) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \left(\int_{G, \nu(x) = q^{-N}} \Phi(x)\, f(x)\, d\mu^\times(x) \right) T^N.$$

Comme Φ est à support compact, pour N assez petit on a :

$$\int_{G,\nu(x)=q^{-N}} \Phi(x) f(x) \, d\mu^{\times}(x) = 0.$$

Ainsi $Z(\Phi, T, f) \in R[[T]][T^{-1}]$

5.1.4. On peut aussi parler en termes d'opérateurs. On définit l'opérateur à un paramètre $Z(\Phi, T, \pi) : V \to V$ par $\langle Z(\Phi, T, \pi) v, \widetilde{v} \rangle = Z(\Phi, T, f)$ avec f définie par $f(x) = \langle \pi(x) v, \widetilde{v} \rangle$ où $v \in V, \widetilde{v} \in \widetilde{V}$. Ainsi $Z(\Phi, T, \pi)$ est une série formelle de Laurent à coefficients dans $\mathrm{End}(V)$. En fait, ce sont des coefficient lisses, *i.e.* $Z(\Phi, T, \pi)$ est une série formelle de Laurent à coefficients dans $\mathrm{End}(V)^{\infty}$ qui est canoniquement isomorphe à $V \otimes \widetilde{V}$

5.1.5. Le théorème principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème. *Supposons l banal ou bien $D = F$. Soit (π, V) une représentation irréductible. On a :*

1. $Z(\Phi, T, f) \in R(T)$. *Il existe $P_0(\pi, T) \in R[T]$ tel que pour tout coefficient f de π, toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$ on ait*

$$Z(\Phi, T, f) P_0(\pi, T) \in R\left[T, T^{-1}\right].$$

2. *Il existe $\gamma(T, \pi, \psi) \in R(T)$ tel que pour tout coefficient f de π, toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$ on ait*

$$Z\left(\widehat{\Phi}, q^{-\frac{1}{2}(n+1)} T^{-1}, \check{f}\right) = \gamma(T, \pi, \psi) Z\left(\Phi, q^{-\frac{1}{2}(n-1)} T, f\right). \qquad \text{(a)}$$

Sa démonstration occupera la fin de cette section et les sections 5.2, 5.3 et 5.4. Donnons d'abord un corollaire de la première partie qui équivaut, en fait, au théorème lui-même mais sous sa forme la plus usuelle.

Corollaire. *Notons $\mathcal{Z}(\pi)$ le sous-R-espace vectoriel de $R(T)$ engendré par les fonctions $Z\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right)$ avec f coefficient de π et $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$. Alors : $\mathcal{Z}(\pi)$ est un idéal fractionnaire de $R[T, T^{-1}]$ contenant les constantes. Il admet un générateur de la forme $L(T, \pi) = 1/P_0(T)$ avec $P_0 \in R[T]$ et $P_0(0) = 1$.*

Démonstration. Avant tout, remarquons que $1 \in \mathcal{Z}(\pi)$: il suffit de prendre le coefficient associé à un vecteur v quelconque et à $\widetilde{v}$ tel que $\widetilde{v}(v) = 1$ et $\Phi = \mu^{\times}(K)^{-1} \mathbf{1}_K$ où K est un sous groupe compact de G de mesure inversible dans R et qui laisse invariant v et $\widetilde{v}$.

Soit $Q(T) \in \mathcal{Z}(\pi), r \in \mathbb{Z}$. Montrons que $Q(T)T^r \in \mathcal{Z}(\pi)$. On peut supposer qu'il existe f coefficient de π et $\Phi \in S_R(M)$ tels que :

$$Q(T) = Z\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right).$$

Soit $a \in G$ avec $\nu(a) = q^{-r}$ et posons

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \Phi(xa^{-1})\, q^{\frac{r(1-n)}{2}} \\ f'(x) &= f(xa^{-1}). \end{aligned}$$

On trouve que

$$Z\left(\Phi', Tq^{\frac{1-n}{2}}, f'\right) = Z\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right) T^r. \tag{b}$$

Puisque l'anneau $R[T, T^{-1}]$ est principal, on en déduit qu'il existe $P_0, Q_0 \in R[T]$ premiers entre eux, avec $P_0(0) = Q_0(0) = 1$ tels que

$$\mathcal{Z}(\pi) = \frac{Q_0(T)}{P_0(T)} R\left[T, T^{-1}\right].$$

Il ne nous reste à montrer que $Q_0(T) = 1$. Or, puisque $1 \in \mathcal{Z}(\pi)$, on ne peut pas avoir $Q_0(T) \neq 1$.

□

5.1.6. On définit $\varepsilon(T, \pi, \psi)$ par l'équation

$$\gamma(T, \pi, \psi) = \varepsilon(T, \pi, \psi) \frac{L(q^{-1}T^{-1}, \widetilde{\pi})}{L(T, \pi)}$$

et

$$L(T, \pi) = \frac{1}{P_0(T)}$$

L'équation fonctionnelle 5.1.5(a) s'écrit alors :

$$\frac{Z\left(\widehat{\Phi}, T^{-1}q^{\frac{-1-n}{2}}, \check{f}\right)}{L(q^{-1}T^{-1}, \widetilde{\pi})} = \varepsilon(T, \pi, \psi) \frac{Z\left(\Phi, Tq^{\frac{1-n}{2}}, f\right)}{L(T, \pi)}.$$

Le lemme suivant se montre comme le lemme 1.3.1

Lemme. *1. $\varepsilon(T, \pi, \psi)$ est indépendant de Φ.*

2. $\varepsilon(T, \pi, \psi_a) = \omega(a)\, |a|^{-n/2}\, T^{n v_F(a)} \varepsilon(T, \pi, \psi)$, pour tout $a \in F^\times$, et où ω est le caractère central de π.

3. *La fonction* $\varepsilon(T,\pi,\psi)$ *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\varepsilon(T,\pi,\psi)\,\varepsilon\left(q^{-1}T^{-1},\widetilde{\pi},\psi\right)=\omega(-1)\,.$$

4. $\varepsilon(T,\pi,\psi)$ *est de la forme* $A(\psi,\pi)T^{n(\psi,\pi)}$, $A(\psi,\pi)\in R^{\times}$, $n(\psi,\pi)\in\mathbb{Z}$.

5.1.7. On remarque finalement que l'on a les identités :

$$\begin{array}{rcl} L(T,\nu^t\pi) & = & L(Tq^{-t},\pi) \\ \gamma(T,\nu^t\pi,\psi) & = & \gamma(Tq^{-t},\pi,\psi) \\ \varepsilon(T,\nu^t\pi,\psi) & = & \varepsilon(Tq^{-t},\pi,\psi). \end{array}$$

5.1.8. L'idée pour montrer le théorème 5.1.5 est la suivante : il est trop compliqué de prouver le théorème pour une représentation irréductible quelconque puisqu'on ne peut pas bien contrôler le comportement *à l'infini* de ses coefficients. On utilise alors l'argument classique de réduction au cas cuspidal, *i.e.* on montre que le théorème est vrai pour les représentations cuspidales (on connaît bien la croissance de leurs coefficients), après on voit que, si le théorème est vrai pour deux représentations, il est de même pour leur induite (ici on utilisera la banalité de l) et puis on utilise le fait que toute représentation irréductible est sous-quotient d'une induite de représentations cuspidales. Plus précisément :

Supposons l banal ou bien $D=F$. Soient $(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ une partition de n, (σ_i,W_i) des représentations *cuspidales* de G_{n_i} et (ξ,V) la représentation de G_n, $\xi=\sigma_1\times\cdots\times\sigma_r$.

Proposition 5.1.8.1. *Si le théorème 5.1.5 est vrai pour toutes les paires* $(\sigma_i,\widetilde{\sigma_i})$ *alors il est aussi vrai pour* $\left(\xi,\widetilde{\xi}\right)$.

Démonstration. La preuve sera faite dans la section 5.4 quand l est banal et dans la section 5.5 quand $D=F$. □

Proposition 5.1.8.2. *Si le théorème 5.1.5 est vrai pour la paire* $\left(\xi,\widetilde{\xi}\right)$, *où* ξ *est une représentation admissible de* G_n *alors il est aussi vrai pour* $(\pi,\widetilde{\pi})$, *où* π *est un sous-quotient irréductible de* ξ. *De plus*

$$L(T,\xi)/L(T,\pi)\in R[T]\quad\gamma(T,\pi,\psi)=\gamma(T,\xi,\psi)\,.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que l'espace des coefficients de π peut être vu comme un sous-espace de l'espace des coefficients de ξ. □

5.2 Algèbres à division

5.2.1. Dans cette section on montre le théorème 5.1.5 dans le cas où $n = 1$, *i.e.* $G = D^{\times}$, D étant une algèbre à division sur F de dimension d^2. On a déjà prouveé le théorème quand $d = 1$ dans le chapitre 1. Le cas où $d > 1$ est similaire : si $d = 1$, les représentations de $F^{\times}$ étaient de dimension 1 et on classifiait les caractères selon qu'ils étaient ramifiés ou pas. Si $d > 1$ les représentations de $D^{\times}$ sont de dimension finie et sont classifiées par le lemme ci-dessous :

Lemme 5.2.2. *Soient G_0 le noyau de ν, et π une représentation irréductible de $D^{\times}$. Ou bien π ne contient pas la représentation triviale de G_0 ou bien π est de la forme :*

$$\pi(x) = \omega\left(\mathrm{Nrd}_{\mathcal{M}_n}(x)\right),$$

où ω est un caractère non ramifié de $F^{\times}$.

5.2.3. Ce lemme nous permet d'expliciter les fonctions L. Les représentations irréductibles étant de dimension finie, il est plus pratique de travailler en termes d'opérateurs. On rappelle qu'on a défini la série formelle à coefficients dans $V \otimes \widetilde{V}$,

$$Z\left(\Phi, T, \pi\right) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \left(\int_{D^{\times}, \nu(x) = q^{-N}} \Phi\left(x\right) \pi\left(x\right) d\mu^{\times}(x) \right) T^N.$$

Si l'on choisit une base de V et sa base duale, on peut voir $Z\left(\Phi, T, \pi\right)$ comme une matrice dont les éléments sont les $Z\left(\Phi, T, f\right)$.

Théorème. *Le théorème 5.1.5.(1) est vrai avec $L(T, \pi) = 1$ sauf si $\pi = \chi \circ \mathrm{Nrd}_{\mathcal{M}_n}$, avec χ un caractère non ramifié, et $q \not\equiv 1 \mod l$. Dans ce cas*

$$L(T, \pi) = L\left(q^{-\frac{1}{2}(n-1)} T, \chi\right).$$

Démonstration. Si $q \not\equiv 1 \mod l$,et π ne contient pas la représentation triviale de G_0, pour tout $\Phi \in S(D)$ et tout coefficient f de π,

$$Z\left(\Phi, T, f\right) = Z\left(\Phi_1, T, f\right),$$

où $\Phi_1(x) = \Phi(x) - \mu^{\times}(G_0)^{-1} \int_{G_0} \Phi(xh) d\mu^{\times}(h)$ (rappelons que q est le cardinal du corps résiduel de D et donc $\mu^{\times}(G_0)$ est inversible dans R). Ainsi, on peut supposer, dans ce cas, que $\Phi(0) = 0$.

Notons ω le caractère central de π. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $D^\times$ tel que Φ et π soient K-invariants à droite et $\mu^\times(K) \in R^\times$. Choisissons un ensemble fini de représentants g_i de G/KZ_F. Alors

$$\begin{aligned} Z(\Phi, T, f) &= \sum_i \left(\sum_N \int_{F^\times, v_F(x)=N} \Phi(g_i x)\omega(x) d\mu^\times(x) T^{nN} \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_N \int_{F^\times, v_F(x)=N} \phi_i(x)\omega(x) d\mu^\times(x) T^{nN} \right), \end{aligned}$$

où $\phi_i(x) = \Phi(g_i x) \in S(F)$.

Si π ne contient pas la représentation triviale de G_0 et $q \not\equiv 1 \mod l$, on peut supposer que $\Phi(0) = 0$ et donc cette dernière expression est un polynôme.

Si $q \equiv 1 \mod l$, comme dans le chapitre 1, on trouve aussi un polynôme.

Si $\pi = \chi \circ \mathrm{Nrd}_{\mathcal{M}_n}$, avec χ un caractère non ramifié, et $q \not\equiv 1 \mod l$ et $\Phi \in S(D^\times)$ on trouve toujours un polynôme. Si, par contre, $\Phi = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_D}$,

$$Z(\Phi, T, \pi) = L(T, \chi)\mu^\times\left(\mathcal{O}_D^\times\right).$$

Cela achève la preuve puisque toute fonction $\Phi \in S(D)$ est une combinaison linéaire d'une fonction de $S(D^\times)$ et de $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_D}$. □

5.2.4. Ainsi le morphisme $\Phi \mapsto Z(\Phi, T, \pi)$ appartient à l'espace Λ_π des morphismes d'espaces vectoriels $\lambda : S_R(D) \to \left(V \otimes \widetilde{V}\right)(T)$ vérifiant :

$$\lambda\left(\Phi(a^{-1}\,\cdot)\right) = \pi(a) T^{n v_F(a)} \lambda(\Phi),$$

pour tout $a \in D^\times$.

L'équation fonctionnelle se montre comme 1.2.7.

Lemme. *L'espace Λ_π est de dimension 1 sur $R(T)$.*

Démonstration. La preuve est exactement la même que celle de 1.2.6. □

5.2.5. Fixons un caractère ψ de F et dx la mesure auto-duale pour ψ. On calculera à partir d'ici les transformées de Fourier par rapport à cette mesure.

Théorème. *Soit π une représentation irréductible de $D^\times$. Il existe une unique fraction rationnelle $\gamma(T, \pi, \psi) \in R(T)$ telle que*

$$Z\left(\widehat{\Phi}, q^{-\frac{1}{2}(n+1)}T^{-1}, \widetilde{\pi}\right) = \gamma(T, \pi, \psi)\, Z\left(\Phi, q^{-\frac{1}{2}(n-1)}T, \pi\right),$$

pour toute fonction $\Phi \in S(D)$.

Démonstration. D'après le lemme précédent il nous suffit de montrer que $\lambda_1 : \Phi \mapsto Z\left(\widehat{\Phi}, q^{-n}T^{-1}, \widetilde{\pi}\right)$ appartient à Λ_π. Il suffit de remarquer, cette fois ci, que :

$$\widehat{\Phi(ax)} = |a|^n \,\widehat{\Phi}\left(a^{-1}x\right),$$

pour $x \in D$, $\Phi \in S(D)$. □

5.3 Cas cuspidal

5.3.1. On démontre ici le théorème 5.1.5 dans le cas où π est une représentation irréductible cuspidale de $G_n(D)$, et $n > 1$. La démonstration est inspirée de [Ja1] et utilise les mêmes méthodes que la section précédente.

Soit donc π une représentation irréductible cuspidale de G_n, $n > 1$, $\omega : F^\times \to R^\times$ son caractère central.

Dans ce cas on va profiter du fait tout coefficient f de π vérifie

$$f(ga) = f(g)\,\omega(a) \quad \text{pour } g \in G,\ a \in F^\times$$

et qu'il est à support compact modulo le centre. On a vu aussi (*cf.* 2.1.7) qu'il existe un sous-groupe compact H de G, de pro-ordre inversible dans R tel que

$$\int_H f(gh)\,d\mu(h) = 0 \;\text{ pour tout } g \in G.$$

5.3.2. Puisque les coefficients sont à support compact, on a

Lemme. *Soit $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$ et notons, pour tout $g \in G$, $\varphi_g(a) = \Phi(ga) \in S_R(F)$. Alors, $Z(\Phi, T, f) \in R[T, T^{-1}]$ si et seulement si les sommes*

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}} \left(\int_{F^\times, |a|=q^{-N}} \varphi_g(a)\,\omega(a)\,d\mu^\times(x)\right) T^N,$$

sont toutes dans $R[T, T^{-1}]$ pour tout $g \in G$.

Démonstration. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $D^\times$ tel que Φ et π soient K-invariants à droite et $\mu^\times(K) \in R^\times$. Choisissons un ensemble fini de représentants g_i de G/KZ_F. Alors

$$\begin{aligned} Z(\Phi, T, f) &= \sum_i \left(\sum_N \int_{F^\times, v_F(x)=N} \Phi(g_i x)\omega(x)d\mu^\times(x)T^{nN}\right) \\ &= \sum_i \left(\sum_N \int_{F^\times, v_F(x)=N} \phi_{g_i}(x)\omega(x)d\mu^\times(x)T^{nN}\right). \end{aligned}$$

d'où le lemme. □

Fixons $g \in G_n$ et supposons $\Phi(0) = 0$; alors $\varphi(0) = 0$. Le même raisonnement que dans la démonstration de 1.2.4 nous montre que

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}} \left(\int_{F^\times, |a| = q^{-N}} \varphi(a)\, \omega(a)\, d\mu^\times(x) \right) T^N \in R\left[T, T^{-1}\right]$$

et donc d'après le lemme précédent $Z(\Phi, T, f) \in R[T, T^{-1}]$.

Dans le cas général, on utilise notre deuxième propriété et on pose

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) - (\mathrm{vol} H)^{-1} \int_H \Phi(xh)\, d\mu(h),$$

où H est le sous-groupe de G de 2.1.7(a). On a $\Phi_1(0) = 0$ et donc $Z(\Phi_1, T, f) \in R[T, T^{-1}]$. Or 2.1.7(a) implique que $Z(\Phi, T, f) = Z(\Phi_1, T, f)$ et ainsi on a montré la première partie de 5.1.5. On a de plus que, si π est cuspidale, alors

$$L(T, \pi) = 1. \tag{a}$$

5.3.3. Il nous reste à prouver l'équation fonctionnelle. Dans [Ja1], on la montre d'une façon similaire à celle déjà utilisée précédemment. L'idée est la même que celle servant à prouver le théorème 4.2.4 : en fait la conjecture de la correspondance thêta dans le cas (G_n, G_n) pour les représentations cuspidales et le fait d'avoir une équation fonctionnelle pour les fonctions zêta des représentations cuspidales sont équivalentes.

Ici on utilisera directement les résultats du théorème 4.2.4. Par l'équation 5.1.5(b), il suffit de montrer que $Z(\Phi, 1, f)$ et $Z(\widehat{\Phi}, q^{-n}, \check{f})$ sont proportionnelles. Or, les applications $\Phi \mapsto Z(\Phi, 1, \pi)$ et $\Phi \mapsto Z(\widehat{\Phi}, q^{-n}, \widetilde{\pi})$ sont deux entrelacements, non nuls, entre $S(\mathcal{M})$ et $V \otimes \widetilde{V}$ et donc proportionnels, par 4.2.4.

Remarquons quand même qu'il n'y a aucun problème de circularité dans nos arguments. On utilise ici seulement l'implication 1 implique 2 du théorème 4.2.4, où on n'avait pas eu besoin des fonctions zêta pour la démonstration.

5.4 Induction dans le cas banal

5.4.1. Dans ce paragraphe on montre la proposition 5.1.8.1 quand la caractéristique de R est banale. Pour faire cela, il faut pouvoir décrire les coefficients de la représentation induite $\xi = \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$ en fonction de ceux des σ_i. On suit ici l'article [Ja2].

Soit P un sous-groupe parabolique standard de G de type $(n_1, n_2, \dots, n_r)$. On écrira les matrices $p \in P$ sous la forme

$$p = \begin{pmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & u_{ij} & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & m_r \end{pmatrix}$$

où $m_i \in G_{n_i}$.

On pose aussi U ou U_P son radical unipotent, $M = M_P = P/U_P$ (et donc $M \simeq \prod G_{n_i}$), $\mathcal{D} = \bigoplus_{1 \le i \le r} \mathcal{M}_{n_i}$ et $K = G(O_H)$. On a $G = PK$.

5.4.2. Pour $i = 1, \dots, r$, soient (σ_i, W_i) des représentations admissibles de G_{n_i} et (σ, W) la représentation de P, triviale sur U, $\sigma = \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_r \otimes 1_U$, $W = W_1 \otimes \dots \otimes W_r$. Notons (ξ, V) la représentation de G induite parabolique normalisée à partir de σ, $\xi = \mathrm{ind}(G, P, \sigma)$ et (ξ', V') la représentation de G induite parabolique normalisée à partir de $\widetilde{\sigma}$. L'entrelacement $\langle \cdot, \cdot \rangle : \xi \times \widetilde{\xi} \to R$ défini par

$$\left\langle F, \widetilde{F} \right\rangle = \int_{P \backslash G} \left\langle F(g), \widetilde{F}(g) \right\rangle d\dot{\mu}(g) = \int_{K_0} \left\langle F(k), \widetilde{F}(k) \right\rangle dk,$$

où $d\dot{\mu}$ est une forme linéaire semi-invariante non nulle (*cf.* 2.1.3) sur l'espace $S_R(P \backslash G, \delta_P)$ (*cf.* [Vi1, I.2.8]) nous permet d'identifier ξ' à $\widetilde{\xi}$ (*cf.* [Vi1, 1.5.11]). La dernière égalité est vraie car on peut intégrer sans problèmes sur K puiqu'on a supposé que l est banal (voir 2.1.3) : c'est l'un des points de la démonstration de [Ja2] qui ne marche pas en caractéristique l non banal.

Lemme. *Soit f un coefficient de ξ déterminé par $F \in V, \widetilde{F} \in V' = \widetilde{V}$. La fonction $H : G \times G \to R$ définie par*

$$H(g_1, g_2) = \left\langle F(g_1), \widetilde{F}(g_2) \right\rangle$$

appartient à l'espace $\mathcal{H}_\sigma$ des fonctions $H : G \times G \to R$ qui vérifient :

1. *$H(u_1 m g_1, u_2 m g_2) = \delta_P(m) H(g_1, g_2)$ pour $g_i \in G, u_i \in U, m \in M$.*
2. *Pour $g_1, g_2 \in G$ la fonction $H_{g_1, g_2} : m \mapsto H(mg_1, g_2)$ est un coefficient de $\sigma \otimes \delta_P^{\frac{1}{2}}$.*
3. *H est $K \times K$-finie à droite.*

De plus, f est donné par

$$f(g) = \int_{P\backslash G} H(hg,h)\, d\dot{\mu}(h) = \int_K H(kg,k)\, dk. \tag{a}$$

Inversement, pour toute $H \in \mathcal{H}_\sigma$, f défini par (a) *est un coefficient de ξ. Le coefficient $\check{f}$ de $\widetilde{\xi}$ est donné par*

$$\check{f}(g) = \int_{P\backslash G} \widetilde{H}(hg,h)\, d\dot{\mu}(h) = \int_K \widetilde{H}(kg,k)\, dk,$$

où $\widetilde{H}(g_1,g_2) = H(g_2,g_1)$ et $\widetilde{H}$ vérifie 1, 2 et 3 avec $\widetilde{\sigma}$ au lieu de σ.

Démonstration. Par définition

$$\begin{gathered} V \otimes \widetilde{V} = \{F : G \times G \to W \otimes \widetilde{W}, K \times K\text{-finie à droite t.q.} \\ F(u_1m_1g_1, u_2m_2g_2) = \delta_P^{1/2}(m_1)\,\delta_P^{1/2}(m_2)\,\sigma(m_1) \otimes \widetilde{\sigma}(m_2) F(g_1,g_2)\} \end{gathered}$$

$G \times G$ agit sur $V \otimes \widetilde{V}$ par translations à droite.

L'espace des coefficients de ξ est isomorphe à $V \otimes \widetilde{V}$. De même, pour tous $g_1, g_2 \in G$, la fonction H_{g_1,g_2} est un coefficient de $\sigma \otimes \delta_P^{\frac{1}{2}}$, et donc on peut voir H_{g_1,g_2} comme un élément de $W \otimes \widetilde{W}$. Montrons que le morphisme qui à chaque $H \in \mathcal{H}_\sigma$ associe la fonction H^* définie par $H^*(g_1,g_2) = H_{g_1,g_2}$ peut être vu comme un morphisme de $\mathcal{H}_\sigma$ vers $V \otimes \widetilde{V}$, inverse de celui défini dans l'énoncé du lemme. En effet, H^* est une fonction qui envoie des éléments de $G \times G$ en des éléments de $W \otimes \widetilde{W}$ (par 2.), $K \times K$-finie à droite (par 3.) et qui vérifie (par 1.)

$$\begin{aligned} H^*(u_1m_1g_1, u_2m_2g_2) &= H^*\left(u_1m_2(m_2^{-1}m_1)g_1, u_2m_2g_2\right) \\ &= \delta_P(m_2)\, H^*\left((m_2^{-1}m_1)g_1, g_2\right) \\ &= \delta_P(m_2)\, \delta_P^{1/2}\left(m_2^{-1}m_1\right) \sigma(m_1) \otimes \widetilde{\sigma}(m_2) H^*(g_1,g_2) \\ &= \delta_P^{1/2}(m_1)\, \delta_P^{1/2}(m_2)\, \sigma(m_1) \otimes \widetilde{\sigma}(m_2) H^*(g_1,g_2)\,. \end{aligned}$$

Le reste du lemme est maintenant clair, en sachant que l'on peut définir, comme on vient de voir, l'entrelacement $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times \widetilde{V} \to R$ par

$$\left\langle F, \widetilde{F} \right\rangle = \int_{P\backslash G} \left\langle F(g), \widetilde{F}(g) \right\rangle d\dot{\mu}(g) = \int_K \left\langle F(k), \widetilde{F}(k) \right\rangle dk.$$

□

5.4.3. Il nous faut un dernier lemme technique qui nous aidera à démontrer la proposition 5.1.8.1. Avec les notations de 5.4.1, on a

Lemme. *Soit $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$.*

1. *Il existe une unique fonction $\Phi_{\mathcal{D}} \in S_R(\mathcal{D})$ telle que*

$$\Phi_{\mathcal{D}}(m) = \prod_{1\leq i\leq r} \left(\nu\left(m_i\right)^{\sum\limits_{i<j\leq n} n_i} \right) \int_U \Phi(mu) du_{i,j},\ \text{où}\ m = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_r \end{pmatrix}.$$

Le morphisme, $\Phi \mapsto \Phi_{\mathcal{D}}$ est une surjection de $S_R(\mathcal{M}) \to S_R(\mathcal{D})$.

2. $\left(\widehat{\Phi}\right)_{\mathcal{D}} = \widehat{\Phi_{\mathcal{D}}}$.

Démonstration. L'espace $S_R(\mathcal{M})$ est engendré par des fonctions de la forme :

$$\Phi = (\phi_{i,j}) : (a_{i,j}) \mapsto \prod_{1\leq i,j\leq r} \phi_{i,j}(a_{i,j}), \tag{a}$$

où $\phi_{i,j} \in S_R\left(\mathcal{M}_{n_i,n_j}\right)$ et $a_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}$. Pour une telle fonction, on a

$$\Phi_{\mathcal{D}}(a_{i,i}) = \prod_{1\leq i\leq r} \phi_{i,i}(a_{i,i}) \prod_{1\leq i>j\leq r} \phi_{i,j}(0) \prod_{1\leq i<j\leq r} \int_U \phi_{i,j}(u_{i,j}) du_{ij}.$$

Ainsi, $\Phi_m \in S_R(\mathcal{D})$ et de même pour toute fonction $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$. La surjectivité est aussi claire.

Il suffit de montrer 2 pour une fonction de la forme a. Pour une telle fonction, $\widehat{\Phi}_{i,j} = \widehat{\phi}_{j,i}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\Phi}\right)_{\mathcal{D}} &= \prod_{1\leq i\leq r} \widehat{\phi}_{i,i}(a_{i,i}) \prod_{1\leq i<j\leq r} \widehat{\phi}_{i,j}(0) \prod_{1\leq i>j\leq r} \int_U \widehat{\phi}_{i,j}(u_{i,j}) du_{ij} \\ &= \prod_{1\leq i\leq r} \widehat{\phi}_{i,i}(a_{i,i}) \prod_{1\leq i>j\leq r} \phi_{i,j}(0) \prod_{1\leq i<j\leq r} \int_U \phi_{i,j}(u_{i,j}) du_{ij} \\ &= \widehat{(\Phi_{\mathcal{D}})}. \end{aligned}$$

□

5.4.4. Dans le cas banal, on peut montrer une proposition plus générale que la proposition 5.1.8.1, comme dans le cas de coefficients dans $\mathbb{C}$.

Proposition. *Soient $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ une partition de n, (σ_i, W_i) des représentations irréductibles de G_{n_i} et (ξ, V) la représentation de G_n, $\xi = \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$. Si le théorème 5.1.5 est vrai pour toutes les paires $(\sigma_i, \widetilde{\sigma_i})$ alors il est aussi vrai pour $\left(\xi, \widetilde{\xi}\right)$. De plus*

$$\mathcal{Z}(\xi) = \prod_i \mathcal{Z}(\sigma_i), \quad \gamma(T, \xi, \psi) = \prod_i \gamma(T, \sigma_i, \psi) .$$

Démonstration. Soit f donné par l'équation 5.4.2(a), on a
$Z\left(\Phi, Tq^{-\frac{1}{2}(n-1)}, f\right) =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{N\in\mathbb{Z}} \left(\int dk \int_{\nu(g)=q^{-N}} \Phi(g)\, H(kg,k)\, d^\times g\right) T^N q^{-\frac{N}{2}(n-1)} \\
&= \sum_{N\in\mathbb{Z}} \left(\int dk \int_{\nu(g)=q^{-N}} \Phi\left(k^{-1}g\right) H(g,k)\, d^\times g\right) T^N q^{-\frac{N}{2}(n-1)} \\
&= \sum_{N\in\mathbb{Z}} \left(\int dkdk' \int_{\nu(g)=q^{-N}} \Phi\left(k^{-1}pk'\right) H(pk',k)\, d^\times p\right) T^N q^{-\frac{N}{2}(n-1)}.
\end{aligned} \tag{a}$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé que l'intégrale sur G se décompose selon la formule

$$\int_G \Psi(g)dg = \int_P \int_K \Psi(pk)dpdk$$

pour toute $\Psi \in S(G)$.

Si l'on pose pour p comme dans 5.4.1 et on définit

$$\begin{aligned}
\Phi^{k,k'} &= \Phi\left(k^{-1}\cdot k'\right) \\
\Phi^{k,k'}_{\mathcal{D}} &= \left(\Phi^{k,k'}\right)_{\mathcal{D}} \quad \text{(cf. 5.4.3)} \\
h(m_1,\ldots,m_r;k,k') &= H(pk',k)\,\delta_P^{-\frac{1}{2}}(p)
\end{aligned}$$

pour k et k' fixés, $\Phi^{k,k'}_{\mathcal{D}} \in S_R(\mathcal{D}) \simeq \underset{1\le i\le r}{\otimes} S_R(\mathcal{M}_{n_i})$.

Remarquons que $h(m_1,\ldots,m_r;k,k')$ ne dépend que des m_i, $i=1,\ldots,r$ et k,k' d'après la propriété 5.4.2.1. La fonction $\Phi^{k,k'}_{\mathcal{D}}$ est donc une somme finie de produits $\prod_i \Phi_i(m_i)$ avec $\Phi_i \in S_R(\mathcal{M}_{n_i})$. De l'autre côté, par 5.4.2.2, $h(m_1,\ldots,m_r;k,k')$ est un coefficient de $\sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_r$, *i.e.* $h(m_1,\ldots,m_r;k,k')$ est une somme finie de produits $\prod_i f_i(m_i)$ avec f_i un coefficient de σ_i.

Or, si l'on fixe aussi des $N_i \in \mathbb{Z}$ l'intégrale

$$\int_{M,\nu(m_i)=q^{-N_i}} \Phi^{k,k'}_{\mathcal{D}}(m_1,\ldots,m_r)\, h(m_1,\ldots,m_r;k,k') \prod_i d^\times m_i$$

est bien définie car l'ensemble

$$\left\{(m_1,\ldots,m_r) : \nu(m_i) = q^{-N_i}\right\} \cap \operatorname{supp}\left(\Phi^{k,k'}_{\mathcal{D}}\right)$$

est une partie compacte de M.

De plus, pour i fixé et $N_i << 0$, $\Phi_{\mathcal{D}}^{k,k'}(m_1, \ldots, m_r) = 0$ si $\nu(m_i) = q^{-N_i}$. Ainsi, en utilisant la formule 2.1.2.c, on a que (a) peut être écrit

$$\sum_{(N_1,\ldots,N_r)\in\mathbb{Z}^r} \int dkdk' \int_{M,\nu(m_i)=q^{-N_i}} \Phi_{\mathcal{D}}^{k,k'}(m_1, \ldots, m_r)$$
$$h(m_1, \ldots, m_r; k, k') \prod_i d^\times m_i \prod_i T^{N_i} q^{-\frac{N_i}{2}(n_i-1)}. \tag{b}$$

L'intégrale sur $K \times K$ est, en fait, une somme finie et donc (b) est une somme finie de produits

$$\prod_i Z\left(\Phi_i, Tq^{-\frac{1}{2}(n_i-1)}, f_i\right) \tag{c}$$

et donc

$$\mathcal{Z}(\xi) \subset \prod_i \mathcal{Z}(\sigma_i).$$

Prouvons l'inclusion inverse. On part de la formule (c). Il existe $\Phi \in S_R(\mathcal{M})$ tel que (*cf.* 5.4.3)

$$\Phi_{\mathcal{D}} = \prod_i \Phi_i(m_i).$$

De plus, puisque Φ est $K \times K$ finie on peut trouver deux fonctions η et η' sur K telles que

$$\Phi(x) = \int\int \Phi\left(k^{-1}xk'\right) \eta(k) \eta'(k') \, dkdk',$$

(il suffit de prendre $\eta = \eta' = \mu(K_1)^{-1}\mathbf{1}_{K_1}$, K_1 étant un sous-groupe compact ouvert de volume inversible dans R et qui laisse invariant Φ), et donc (c) vaut :

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}} \int dkdk' \int_{P,\nu(p)=q^{-N}} \Phi\left(k^{-1}pk'\right) \tag{d}$$
$$\prod_i f_i(m_i) \, \delta_P^{\frac{1}{2}}(p) \, \eta(k) \, \eta'(k') \, d^\times p T^N q^{-\frac{N}{2}(n-1)}.$$

Soit dh la mesure de Haar normalisée (ici on utilise à nouveau l'hypothèse de banalité) sur le groupe compact $K \cap P$. En changeant k en kh et k' en $k'h'$ où h et h' sont dans $K \cap P$ et en intégrant sur $(K \cap P) \times (K \cap P)$, on trouve que (d) vaut

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}}\int dhdh'dkdk'\int_{P,\nu(p)=q^{-N}}\Phi\left(k^{-1}h^{-1}ph'k'\right) \tag{e}$$
$$\prod_i f_i\left(m_i\right)\delta_P^{\frac{1}{2}}\left(p\right)\eta\left(hk\right)\eta'\left(h'k'\right)d^\times pT^N q^{-\frac{N}{2}(n-1)}.$$

On change maintenant p en hph'^{-1} et on écrit h, h' sous la forme 5.4.1, avec $h_i, h'_i \in K_{n_i}$ au lieu des m_i. La quantité (e) vaut

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}}\int_{P,\nu(p)=q^{-N}}\Phi\left(k^{-1}pk'\right)H_1(p,k,k')dkdk'd^\times gT^N q^{-\frac{N}{2}(n-1)}, \tag{f}$$

où
$$H_1(p,k,k') = \int\prod_i f_i\left(h_i m_i h_i'^{-1}\right)\delta_P^{\frac{1}{2}}\left(p\right)\eta\left(hk\right)\eta'\left(h'k'\right)dhdh'.$$

En comparant (f) avec (a), on voit qu'il ne nous reste à montrer qu'il existe $H : G\times G \to R$ qui vérifie les conditions 1, 2 et 3 de 5.4.2 tel que

$$H\left(pk,k'\right) = H_1(p,k,k').$$

Posons $H(g,g') = H_1(p,k,k')$ pour $g = pk$ et $g' = p'k'$ et voyons qu'elle est bien définie. En effet, si on a deux décompositions $g = p_1k_1 = p_2k_2$ et $g' = p'_1k'_1 = p'_2k'_2$, montrons que :

$$H_1(p_1,k_1,k'_1) = H_1(p_2,k_2,k'_2).$$

Soient $h_0, h'_0 \in K\cap P$ tels que $p_1^{-1}p_2 = k_1k_2^{-1} = h_0$ et $p_1'^{-1}p'_2 = k'_1k_2'^{-1} = h'_0$. Alors :

$$\begin{aligned}
H_1(p_1,k_1,k'_1) &= \int\prod_i f_i\left(h_i m_{1,i} h_i'^{-1}\right)\delta_P^{\frac{1}{2}}\left(p_1\right)\eta\left(hk_1\right)\eta'\left(h'k'_1\right)dhdh' \\
&= \int\prod_i f_i\left(h_i h_{0,i}^{-1} m_{2,i} h_i'^{-1}\right)\delta_P^{\frac{1}{2}}\left(h_0^{-1}p_2\right)\eta\left(hh_0k_2\right)\eta'\left(h'h'_0k'_2\right)dhdh' \\
&= \int\prod_i f_i\left(h_i m_{2,i} h_i'^{-1}\right)\delta_P^{\frac{2}{2}}\left(p_2\right)\eta\left(hk_2\right)\eta'\left(h'k'_2\right)dhdh' \\
&= H_1(p_2,k_2,k'_2).
\end{aligned}$$

Ainsi, si f est le coefficient qui correspond à H, on trouve finalement

$$\prod_i Z\left(\Phi_i, Tq^{-\frac{1}{2}(n_i-1)}, f_i\right) = Z\left(\Phi, Tq^{-\frac{1}{2}(n-1)}, f\right)$$

et donc
$$\prod_i \mathcal{Z}(\sigma_i) = \mathcal{Z}(\xi) \,.$$

Pour montrer l'équation fonctionnelle remarquons que, si l'on remplace f par $\check{f}$ et Φ par $\widehat{\Phi}$, alors H est remplacé par $\widetilde{H}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\Phi^{k,k'}}\right)_{\mathcal{D}} &= \widehat{\Phi_{\mathcal{D}}^{k,k'}} \text{ (cf. 5.4.3)} \\
h\left(m_1^{-1}, \ldots, m_r^{-1}; k, k'\right) &= \widetilde{H}(pk', k)\, \delta_P^{-\frac{1}{2}}(p) \,,
\end{aligned}$$

et donc $Z\left(\widehat{\Phi}, T^{-1}q^{-\frac{1}{2}(n-1)}, \check{f}\right) =$

$$= \sum_{(N_1,\ldots,N_r)\in\mathbb{Z}^r} \int dkdk' \int_{M,\nu(m_i)=q^{-N_i}} \widehat{\Phi_{\mathcal{D}}^{k,k'}}(m_1, \ldots, m_r)$$
$$h\left(m_1^{-1}, \ldots, m_r^{-1}; k, k'\right) \prod_i d^\times m_i \prod_i T^{-N_i} q^{-\frac{N_i}{2}(n_i-1)},$$

la somme des intégrales étant bien définie par les mêmes arguments de la proposition précédente. Les équations fonctionnelles pour les σ_i impliquent alors que

$$Z\left(\widehat{\Phi}, T^{-1}q^{-\frac{1}{2}(n-1)}, \check{f}\right) = \prod_i \gamma(T, \sigma_i, \psi)\, Z\left(\Phi, Tq^{-\frac{1}{2}(n-1)}, f\right),$$

ce qui achève la démonstration. □

5.4.5. Dans le cas non banal, une mesure semi-invariante sur $P\backslash G$ n'équivaut pas à une mesure sur K. La proposition précédente pourrait s'étendre à ce cas mais il nous faudrait de nouveaux arguments. Dans la section suivante, on va voir un exemple pour comprendre un peu mieux le comportement des fonctions L dans ce cas.

5.4.6. Supposons $R = \overline{\mathbb{Q}_l}$. On a déjà calculé, aux sections 1.2.4, 5.2.3 et 5.3.2(a), explicitement, les polynômes $L(T, \sigma_i)$ quand σ_i est une représentation irréductible de $F^\times$, de $D^\times$ ou bien une représentation cuspidale et on a vu que, si de plus σ_i est l-entière,

$$\frac{1}{L(T, \sigma_i)} \in \overline{\mathbb{Z}_l}(T) \,.$$

On déduit alors de la proposition précédente et de la proposition 5.1.8.2 que, pour toute $\overline{\mathbb{Q}_l}$-représentation irréductible π on a :

$$\frac{1}{L(T, \pi)} \in \overline{\mathbb{Z}_l}(T) \,.$$

5.5 Réduction modulo l

5.5.1. Supposons ici $R = \overline{\mathbb{Q}_l}$, $l \neq p$, et notons $S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(\mathcal{M})$ le sous-module de $S_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(\mathcal{M})$ des fonctions à valeurs dans l'anneau des entiers $\overline{\mathbb{Z}_l}$. On rappelle que Λ est l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}_l}$. Notons aussi μ, $\mu^\times$ des mesures de Haar sur $\mathcal{M}$ et G respectivement à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}$ et $\overline{\mu}$, $\overline{\mu}^\times$ des mesures de Haar sur $\mathcal{M}$ et G respectivement à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}_l}$ telles que, si l'on pose $r_l : \overline{\mathbb{Z}_l} \to \overline{\mathbb{F}_l}$, la réduction modulo l, on ait

$$\begin{aligned} r_l\left(\mu\left(\mathcal{M}(\mathcal{O})\right)\right) &= \overline{\mu}\left(\mathcal{M}(\mathcal{O})\right) \\ r_l\left(\mu^\times\left(1+\mathcal{M}(\mathcal{P})\right)\right) &= \overline{\mu}^\times\left(1+\mathcal{M}(\mathcal{P})\right). \end{aligned} \tag{a}$$

Ainsi on a que pour toute fonction $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(\mathcal{M})$ et toute fonction $\Psi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(G)$

$$\begin{aligned} r_l\left(\int_{\mathcal{M}} \Phi(x)\, d\mu(x)\right) &= \int_{\mathcal{M}} r_l\left(\Phi(x)\right) d\overline{\mu}(x) \\ r_l\left(\int_G \Psi(x)\, d\mu^\times(x)\right) &= \int_G r_l\left(\Psi(x)\right) d\overline{\mu}^\times(x). \end{aligned} \tag{b}$$

Soit π une représentation irréductible l-entière, Γ un réseau (*cf.* 2.1.10) de π. On note $\widetilde{\Gamma}$ le réseau (*cf.* [Vi1, I.9.7]) de $\widetilde{V}$ des $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ tels que, pour tout $g \in G$, on a :

$$\langle \pi(g)v, \widetilde{v}\rangle \in \overline{\mathbb{Z}_l}.$$

Si $\overline{v}$ et $\overline{\widetilde{v}}$ sont deux vecteurs dans $\Gamma/\Lambda\Gamma$ et $\widetilde{\Gamma}/\Lambda\widetilde{\Gamma}$ respectivement et on note $v \in \Gamma$ et $\widetilde{v} \in \widetilde{\Gamma}$ tels que $v = \overline{v} \mod \Lambda\Gamma$ et $\widetilde{v} = \overline{\widetilde{v}} \mod \widetilde{\Lambda\Gamma}$ on a que le coefficient défini par v et $\widetilde{v}$ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}$ et sa réduction modulo l est égale au coefficient de $\Gamma/\Lambda\Gamma$ déduit des vecteurs $\overline{v}$ et $\overline{\widetilde{v}}$.

On déduit de 5.5.1(a) que, si π est une représentation irréductible l-entière, pour toute fonction $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(\mathcal{M})$ et tout coefficient f de π à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}$ défini comme précédemment

$$r_l\left(Z\left(\Phi, T, f\right)\right) = Z\left(r_l\left(\Phi\right), T, r_l\left(f\right)\right).$$

5.5.2. On vérifie que la proposition 5.1.2 est toujours correcte pour $R = \overline{\mathbb{Z}_l}$ et que, si $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F)$, alors $\widehat{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(F)$ si l'on calcule la transformée de Fourier en utilisant la mesure auto-duale par rapport à ψ, un caractère de F à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}^\times$. Remarquons qu'alors $r_l(\psi)$ est un caractère non trivial de $\overline{\mathbb{F}_l}$ tel que

$$r_l\left(\widehat{\Phi}\right) = \widehat{r_l\left(\Phi\right)}.$$

Théorème. *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}_l}$-représentation irréductible l-entière et Γ un réseau de π. Pour toute fonction $\overline{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{F}_l}}(\mathcal{M})$ et tout coefficient $\overline{f}$ de $\Gamma/\Lambda\Gamma$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}_l}$, on a :*

1. *$Z\left(\overline{\Phi}, T, \overline{f}\right) \in \overline{\mathbb{F}_l}(T)$. Il existe $\overline{P_0}(\Gamma/\Lambda\Gamma, T) \in \overline{\mathbb{F}_l}[T]$ tel que pour tout coefficient $\overline{f}$ de $\Gamma/\Lambda\Gamma$, toute fonction $\overline{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{F}_l}}(\mathcal{M})$ on ait*
$$Z\left(\overline{\Phi}, T, \overline{f}\right) \overline{P_0}(\Gamma/\Lambda\Gamma, T) \in \overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right].$$
2. *Il existe $\overline{\gamma}(T, \Gamma/\Lambda\Gamma, r_l(\psi)) \in \overline{\mathbb{F}_l}(T)$ tel que pour tout coefficient $\overline{f}$ de $\Gamma/\Lambda\Gamma$, toute fonction $\overline{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{F}_l}}(\mathcal{M})$ on ait*
$$Z\left(\widehat{\overline{\Phi}}, q^{-\frac{1}{2}(n+1)}T^{-1}, \check{\overline{f}}\right) = \overline{\gamma}(T, \Gamma/\Lambda\Gamma, r_l(\psi)) Z\left(\overline{\Phi}, q^{-\frac{1}{2}(n-1)}T, \overline{f}\right).$$
De plus on a que $\overline{\gamma}(T, \Gamma/\Lambda\Gamma, r_l(\psi))$ est la réduction modulo l de $\gamma(T, \pi, \psi)$.

Démonstration. On sait que ce théorème est vrai pour π. Notons
$$P_0(\pi, T) = \frac{1}{L(T, \pi)}.$$

D'après 5.4.6, on a que $P_0(\pi, T) \in \overline{\mathbb{Z}_l}(T)$; notons $r_l(P_0)(\pi, T)$ sa réduction modulo l.

On va prouver que, pour toute fonction $\overline{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{F}_l}}(\mathcal{M})$ et tout coefficient $\overline{f}$ de $\Gamma/\Lambda\Gamma$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}_l}$,
$$Z\left(\overline{\Phi}, T, \overline{f}\right) r_l(P_0)(\pi, T) \in \overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right].$$

En effet, relevons $\overline{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{F}_l}}(\mathcal{M})$ en une fonction $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(\mathcal{M})$ et soit f un coefficient de π tel que $r_l(f) = \overline{f}$.

Alors, d'après le théorème pour π, il existe $P(T) \in \overline{\mathbb{Q}_l}[T, T^{-1}]$ tel que
$$Z(\Phi, T, f) P_0(\pi, T) = P(T).$$

Or, puisque $P_0(T, \omega) \in \overline{\mathbb{Z}_l}(T)$ on a que, en fait
$$P(T) \in \overline{\mathbb{Z}_l}\left[T, T^{-1}\right]$$
et donc, par réduction modulo l, on trouve que
$$Z\left(\overline{\Phi}, T, \overline{f}\right) r_l(P_0)(\pi, T) = r_l(P)(\pi, T) \in \overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right].$$

Pour montrer 2., il suffit de poser
$$\overline{\gamma}(T, \Gamma/\Lambda\Gamma, r_l(\psi)) = r_l(\gamma(T, \pi, \psi)) = r_l\left(\frac{Z\left(\widehat{\Phi}, q^{-\frac{1}{2}(n+1)}T^{-1}, \check{f}\right)}{Z\left(\Phi, q^{-\frac{1}{2}(n-1)}T, f\right)}\right),$$
pour n'importe quelle fonction $\Phi \in S_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(\mathcal{M})$ et f coefficient de π. $\square$

5.5.3. On en déduit, comme dans 5.1.5, le corollaire suivant :

Corollaire. *Notons* $\mathcal{Z}(\Gamma/\Lambda\Gamma)$ *le sous-*$\overline{\mathbb{F}_l}$*-espace vectoriel de* $\overline{\mathbb{F}_l}(T)$ *engendré par les fonctions* $Z\left(\overline{\Phi}, Tq^{\frac{1-n}{2}}, \overline{f}\right)$ *avec* $\overline{f}$ *coefficient de* $\Gamma/\Lambda\Gamma$ *et* $\overline{\Phi} \in S_{\overline{\mathbb{F}_l}}(\mathcal{M})$. *Alors* $\mathcal{Z}(\Gamma/\Lambda\Gamma)$ *est un idéal fractionnaire de* $\overline{\mathbb{F}_l}[T, T^{-1}]$ *contenant les constantes. Il admet un générateur de la forme* $L(T, \Gamma/\Lambda\Gamma) = 1/P_0(T)$ *avec* $P_0 \in \overline{\mathbb{F}_l}[T]$ *et* $P_0(0) = 1$.

5.5.4. La preuve du théorème 5.5.2 implique alors :

Corollaire. $L(T, \Gamma/\Lambda\Gamma)^{-1}$ *divise* $r_l\left(L(T, \omega)^{-1}\right)$ *dans l'anneau* $\overline{\mathbb{F}_l}[T, T^{-1}]$.

En général on n'a pas une égalité. Pourtant, dans le cas banal, on a l'égalité (voir la section 5.6).

5.5.5. Prouvons maintenant la proposition 5.1.8.1 quand R est quelconque (non nécessairement de caractéristique banale) mais $D = F$ (on verra que cette condition n'est peut être pas nécessaire). Soient donc $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ une partition de n, $(\overline{\sigma_i}, W_i)$ des représentations *cuspidales* de G_{n_i} et (ξ, V) la représentation de G_n, $\overline{\xi} = \overline{\sigma_1} \times \cdots \times \overline{\sigma_r}$.

Proposition. *Si le théorème 5.1.5 est vrai pour toutes les paires* $\left(\overline{\sigma_i}, \widetilde{\overline{\sigma_i}}\right)$ *alors il est aussi vrai pour* $\left(\overline{\xi}, \widetilde{\overline{\xi}}\right)$.

Démonstration. Il suffit de le montrer quand la caractéristique de R est positive. Dans ce cas (*cf.* [Vi1, III.5.10]), toute représentation cuspidale $\overline{\sigma_i}$ se relève en une représentation cuspidale σ_i (c'est juste ici que l'on utilise le fait $D = F$, probablement c'est vrai en général).

On a alors que la réduction modulo l de $\xi = \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$ contient $\overline{\xi}$. D'après le paragraphe précédent, le théorème 5.1.5 est aussi vrai pour $\overline{\xi}$.

□

5.5.6. Voyons finalement un exemple :

Proposition. *Notons* 1_2 *la représentation triviale de* $GL_2(F)$. *Alors*

$$L(T, 1_2) = \begin{cases} 1 & \textit{si } q \equiv 1 \mod l \\ \frac{1}{1-q^{1/2}T} & \textit{si } q \equiv -1 \mod l \textit{ et } l \neq 2 \\ \left(\frac{1}{1-q^{1/2}T}\right)\left(\frac{1}{1-q^{-1/2}T}\right) & \textit{si } q^2 \not\equiv 1 \mod l \textit{ (i.e. } l \textit{ banal).} \end{cases}$$

Démonstration. Si l est banal c'est une conséquence de la section suivante 5.6.

Supposons $q^2 \equiv 1 \mod l$.

On rappelle que $S(\mathcal{M})$ est engendré par les fonctions caractéristiques des ensembles de la forme $a + \varpi^n \mathcal{M}(\mathcal{O})$ avec $a \in \mathcal{M}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par l'action de G_n à droite et à gauche, ces fonctions se classent en trois orbites, selon le rang de la matrice a. La formule

$$Z(\Phi(g' \cdot g), T, 1_2) = T^{-nv_D(g)+nv_D(g')} Z(\Phi(\cdot), T, 1_2),$$

pour tout $g \in G$ nous dit que, pour calculer la fonction L, il suffit donc d'expliciter les fonctions zêta $Z\left(\mathbf{1}_{a+\varpi^n\mathcal{M}(\mathcal{O})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right)$ pour $a = 1_2$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $a = 0$. On aura après que $\mathcal{Z}(1_2)$ est le $R[T, T^{-1}]$-module engendré par ces trois fonctions.

1. Si $a = 1_2$, $Z\left(\mathbf{1}_{a+\varpi^n\mathcal{M}(\mathcal{O})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right) \in R$, pour tout n.
2. Si $a = 0$, $Z\left(\mathbf{1}_{a+\varpi^n\mathcal{M}(\mathcal{O})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right) =$

$$\mu^\times(GL(\mathcal{O}))\, T^n \left(1 - q^{-1/2}T\right)^{-1}\left(1 - q^{1/2}T\right)^{-1} = 0,$$

   pour tout n, parce que le volume du compact maximal est 0 ($q^2 \equiv 1 \mod l$).
3. Si $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Z\left(\mathbf{1}_{a+\varpi^n\mathcal{M}(\mathcal{O})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right) = \sum_{m \geq n} u_m T^m q^{-m/2}$, où

$$\begin{aligned} u_m &= \int_{a,b,c,d \in \mathcal{P}^n, (1+a)d - bc \in \mathcal{P}^m/\mathcal{P}^{m+1}} \Phi\begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & d \end{pmatrix} d\mu^\times(g) \\ &= \int_{a,b,c,d \in \mathcal{P}^n, (1+a)d - bc \in \mathcal{P}^m/\mathcal{P}^{m+1}} q^{2m}\Phi\begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & d \end{pmatrix} d\mu(g). \end{aligned}$$

   Calculons donc le volume des $a, b, c, d \in \mathcal{P}^n, (1+a)d - bc \in \mathcal{P}^m/\mathcal{P}^{m+1}$.
   Supposons $\mu^\times(1 + \mathcal{M}(\mathcal{O})) = 1$ et posons $u = (1+a)d - bc$, *i.e.* $d = (u + bc)(1+a)^{-1}$. Si $m \geq n$ alors $a, b, c \in \mathcal{P}^n, u \in \mathcal{P}^m/\mathcal{P}^{m+1}$ et d est fixé donc ce volume vaut $q^{-3n}(q-1)q^{-m}q^{2m}$.
   Or, $q^{-3n}(q-1)q^{-m}q^{2m} = 0$ si $q \equiv 1 \mod l$.
   Sinon, $Z\left(\mathbf{1}_{a+\varpi^n\mathcal{M}(\mathcal{O})}, Tq^{-1/2}, 1_2\right)$ est une série géométrique de raison $Tq^{1/2}$, d'où la proposition.

□

Remarque. On s'attendait à ce résultat. En effet, si $q \equiv -1 \mod l$ et $l \neq 2$, la représentation triviale se relève en $(-1)^{v_F} St_2$ qui a comme fonction L, $\frac{1}{1-q^{1/2}T}$.

Remarque. Dans le cas des coefficients complexes, on a un théorème de réciprocité qui nous dit que les fonctions L et les facteurs epsilon des représentations de la forme $\chi\pi$ pour χ un caractère, déterminent la représentation irréductible π, pour π une représentation irréductible de $GL_2(F)$.

Si $q \equiv 1 \mod l$, les fonctions L et les facteurs epsilon ne déterminent pas toutes les représentations irréductibles. On ne peut pas avoir un théorème de réciprocité car, dans ce cas, ces fonctions ne peuvent pas différencier, par exemple, la représentation triviale de la représentation de Steinberg de $GL_2(F)$.

5.6 Classification des fonctions L dans le cas banal

5.6.1. Dans cette section on se place sous les hypothèses des sections 2.2 et 2.3, *i.e.* on suppose que, ou bien $R = \mathbb{C}$ ou bien $D = F$ et R est de caractéristique banale. Dans ces cas, on a vu qu'on a une paramétrisation, en termes de segments, de l'ensemble des représentations irréductibles de G_n a isomorphisme près. On va utiliser cette classification pour calculer les fonctions L en fonction d'une telle paramétrisation.

Théorème. *Plaçons nous sous cette hypothèse. Soit $\pi = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_t \rangle^t$ une représentation irréductible de G_n (cf. chapitre 2). Si l'on note pour tout i, $1 \leq i \leq t$, $\Delta_i = \left\{\rho_i^{(1)}, \ldots, \rho_i^{(n_i)}\right\}$ alors*

$$L(T, \pi) = \prod_{1 \leq i \leq t} L\left(T, \rho_i^{(n_i)}\right).$$

Les fonctions $L\left(T, \rho_i^{(n_i)}\right)$ onthh été calculées dans les sections précédentes.

Démonstration. Si le corps de coefficients est $R = \mathbb{C}$ c'est le théorème [Ja2, 3.4.]. Puisque la construction des fonctions L en tant que séries de Laurent est purement formelle, ce résultat reste vrai pour R de caractéristique 0 algébriquement clos quelconque. Pour R de caractéristique $l > 0$ banale, on peut utiliser l'astuce de la réduction modulo l de 2.3.12 et les résultats de 5.5

En effet soit $\overline{\pi} = \left\langle \overline{\Delta_1}, \ldots, \overline{\Delta_t} \right\rangle^t$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation, $l > 0$ banale. D'après 2.3.12, il existe une $\overline{\mathbb{Q}_l}$-représentation irréductible, paramétrée par $\pi = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_t \rangle^t$ (voir les notations de 2.3.12), telle que $\overline{\pi} \in r_l(\pi)$. Avec ces notations précédentes, on a

1. Le théorème 5.6.1 est vrai en caractéristique 0 (*cf.* [Ja2, 3.4.]),
$$L(T, \pi) = \prod_{1 \leq i \leq t} L\left(T, \rho_i^{(n_i)}\right).$$
2. D'après 1.2.4, 5.2.3 et 5.3.2(a), pour tout i, $1 \leq i \leq t$, $L(T, \overline{\rho}_i^{(n_i)}) = r_l\left(L(T, \rho_i^{(n_i)})\right)$.
3. Par 5.5.4,
$$L\left(T, r_l\left(\pi\right)\right)^{-1} \quad \text{divise} \quad r_l\left(L\left(T, \pi\right)^{-1}\right),$$
dans l'anneau $\overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right]$.
4. Les polynômes $L\left(T, \overline{\rho}_i^{(n_i)}\right)^{-1}$ et $L\left(T^{-1}q^{-1}, \widetilde{\overline{\rho}_i^{(1)}}\right)^{-1}$ sont *premiers entre eux.*

On raisonne par récurrence sur t. Si $t = 1$, on a deux possibilités :

1. ou bien, $L(T, \pi) = 1$ et donc, par 3, $L\left(T, \overline{\pi}\right) = 1$,
2. ou bien, $\pi = \langle \Delta_1 \rangle^t$, avec $\Delta = \{\rho, \ldots, \rho'\}$ et ρ un caractère non ramifié et, par [Ja2, 3.1.3][1], $L(T, \pi) = \frac{1}{1-\rho'(\varpi)T}$. Dans ce cas, à nouveau par 3, ou bien $L\left(T, \overline{\pi}\right) = 1$ ou $L\left(T, \overline{\pi}\right) = \frac{1}{1-r_l(\rho'(\varpi))T}$. Voyons que le premier cas n'est pas possible. En effet, d'un côté, on a
$$\gamma\left(T, r_l\left(\pi\right), r_l\left(\psi\right)\right) = r_l\left(\gamma\left(T, \pi, \psi\right)\right). \tag{a}$$
Par 4., $r_l\left(L\left(T, \rho'\right)^{-1}\right)$ et $r_l\left(L\left(T^{-1}q^{-1}, \widetilde{\rho}\right)^{-1}\right)$ sont premiers entre eux dans $\overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right]$ et donc $r_l\left(\gamma\left(T, \pi, \psi\right)\right) \notin \overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right]$. Si $L\left(T, \overline{\pi}\right) = 1$, alors $\gamma\left(T, r_l\left(\pi\right), r_l\left(\psi\right)\right) \in \overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right]$ ce qui contredit (a).

Supposons $t > 1$ et le résultat vrai pour $j < t$.

Lemme. *On a que* $L\left(T, \left\langle \overline{\Delta_i} \right\rangle^t\right)^{-1}$ *et* $L\left(T^{-1}q^{-1}, \left\langle \widetilde{\overline{\Delta}_j} \right\rangle^t\right)^{-1}$ *sont premiers entre eux dans* $\overline{\mathbb{F}_l}\left[T, T^{-1}\right]$ *sauf si* $\overline{\rho}_i^{(1)}$ *est un caractère non ramifié et*
$$\overline{\rho}_i^{(n_i)} = \overline{\rho}_j^{(1)} \nu^{-1}.$$

[1]Remarquons que, dans [Ja2, 3.1.3], il faut changer $L(s, \tau)$ en $L(s, \tau\alpha^{r-1})$.

Démonstration. En effet, d'après ce qui précède, si $\overline{\rho}_i^{(1)}$ est un caractère non ramifié, on a

$$\begin{aligned} L\left(T, \left\langle \overline{\Delta_i} \right\rangle^t\right)^{-1} &= 1 - \overline{\rho}_i^{(n_i)}(\varpi)T \\ L\left(T^{-1}q^{-1}, \left\langle \overline{\widetilde{\Delta}_j} \right\rangle^t\right)^{-1} &= 1 - \widetilde{\overline{\rho}_j^{(1)}}(\varpi)T^{-1}q^{-1}. \end{aligned}$$

□

Corollaire. *Si le multisegment* $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_t\}$ *est rangé,* $L\left(T, \left\langle \overline{\Delta_1} \right\rangle^t\right)^{-1}$ *est premier à*

$$\prod_{1 \le i \le t} L\left(T^{-1}q^{-1}, \left\langle \overline{\widetilde{\Delta}_j} \right\rangle^t\right)^{-1}.$$

Ainsi on a, par 5.1.5 et 5.5.2, que

$$L\left(T, \left\langle \overline{\Delta_1} \right\rangle^t\right) \in \mathcal{Z}\left(\overline{\pi}\right),$$

et qu'il suffit, pour prouver le théorème, de montrer que

$$\prod_{2 \le i \le t} L\left(T, \left\langle \overline{\Delta_i} \right\rangle^t\right) \in \mathcal{Z}\left(\overline{\pi}\right),$$

Notons $\overline{\pi'} = \left\langle \overline{\Delta_2}, \ldots, \overline{\Delta_t} \right\rangle^t \in \operatorname{Irr}(G_p)$ et $\pi' = \langle \Delta_2, \ldots, \Delta_t \rangle^t$, $\overline{\pi}$ est un quotient de $\left\langle \overline{\Delta_1} \right\rangle^t \times \overline{\pi'}$. Puisque l'on veut juste montrer que

$$\prod_{2 \le i \le t} L\left(T, \left\langle \overline{\Delta_i} \right\rangle^t\right) \in \mathcal{Z}\left(\overline{\pi}\right),$$

et que, par hypothèse de récurrence,

$$\prod_{2 \le i \le t} L\left(T, \left\langle \overline{\Delta_i} \right\rangle^t\right) \in \mathcal{Z}\left(\overline{\pi'}\right),$$

il suffit de prouver que pour toute $\overline{\Phi}_2 \in S(\mathcal{M}_p)$ et tout coefficient $\overline{f_2}$ de $\overline{\pi'}$, il existe $\overline{\Phi} \in S(\mathcal{M}_n)$ et $\overline{f}$ coefficient de $\overline{\pi}$ tels que

$$Z\left(\overline{\Phi}, Tq^{-1/2(n-1)}, \overline{f}\right) = Z\left(\overline{\Phi}_2, Tq^{-1/2(p-1)}, \overline{f}_2\right). \tag{b}$$

Dans [Ja2, 3.5.], quand la caractéristique de R est nulle, on construit $\overline{\Phi} \in S(\mathcal{M}_n)$ et $\overline{f}$ coefficient de $\overline{\pi}$, en utilisant les entrelacements de la théorie du quotient de Langlands. On pourrait essayer de montrer que ces opérateurs d'entrelacement convergent en caractéristique positive mais on peut utiliser l'astuce suivante :

On relève $\overline{\Phi}_2$ en Φ_2 fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_l$, et $\overline{f_2}$ en f_2 coefficient de π' à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_l$.

Lemme. *Il existe $\Phi \in S(\mathcal{M}_n)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et f coefficient de π à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ tels que*

$$Z\left(\Phi, Tq^{-1/2(n-1)}, f\right) = Z\left(\Phi_2, Tq^{-1/2(p-1)}, f_2\right). \tag{c}$$

Démonstration. C'est fait dans [Ja2, 3.5.]. Rappelons brièvement la construction de Φ et f.

Soient d'abord, $\Phi_1 \in S(\mathcal{M}_{n-p})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_l$ et f_1 coefficient de $\left\langle\overline{\Delta_1}\right\rangle^t$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_l$ tels que

$$Z\left(\Phi_1, Tq^{-1/2(n-p-1)}, f_1\right) = 1.$$

Soient aussi $\Phi_{1,2} \in S(\mathcal{M}_{n-p,p})$, $\Phi_{2,1} \in S(\mathcal{M}_{p,n-p})$ à support dans un voisinage de O pour que la fonction $\Phi \in S(\mathcal{M}_n)$ définie par

$$\Phi\begin{pmatrix} m_1 & y \\ x & m_2 \end{pmatrix} = \Phi_1(m_1)\Phi_{2,1}(x)\Phi_{1,2}(y)\Phi_2(m_2)$$

satisfasse à

$$\int \Phi\begin{pmatrix} m_1 & y \\ xm_1 & m_2 + xy \end{pmatrix} dxdy = \Phi_1(m_1)\Phi_2(m_2).$$

On pose ξ et ξ' deux fonctions K-finies telles que

$$\int \Phi\left(k^{-1}zk'\right)\xi(k)\xi'(k')dkdk' = \Phi(z).$$

Soient aussi dh et dh' deux mesures de Haar normalisées sur $K \cap \overline{P}$ et $K \cap P$ respectivement et notons, pour $h \in K \cap \overline{P}$ et $h' \in K \cap P$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ * & h_2 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} h'_1 & * \\ 0 & h'_2 \end{pmatrix};$$

si l'on défini

$$H_1\left[\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, k, k'\right] =$$

$$= \delta_P\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}^{1/2} \int \xi(hk)\xi'(h'k')f_1(h_1m_1h_1'^{-1})f_2(h_2m_2h_2'^{-1})dhdh'.$$

Alors, si l'on pose $H : G_n \times G_n \to \overline{\mathbb{Q}_l}$ la fonction

$$H\left[\begin{pmatrix} m_1 & u \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} k, \begin{pmatrix} m_1' & u' \\ 0 & m_2' \end{pmatrix} k'\right] = H_1\left[\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, k, k'\right]$$

est bien définie ainsi que le coefficient f de π donné par la formule

$$f(g) = \int_{M\backslash G} H(tg, t)dt.$$

Dans [Ja2, 3.5.], on montre que f et Φ ainsi définis satisfont à (c). $\square$

La fonction Φ est un produit des fonctions entières et f est défini par une intégrale (donnée par une mesure à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}$) de fonctions entières.

On a donc que, *en fait*, Φ et f sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_l$ et donc leur réduction, $\overline{\Phi}$ et $\overline{f}$, modulo l, par 5.5.1(a), vérifient (b) ce qui conclut la preuve du théorème.

$\square$

Question. *Dans le chapitre 2, on avait trouvé une totale symétrie entre les deux classifications à la Langlands et à la Zelevinskii. Les définitions des fonctions zêta semblent assez naturelles mais, pourtant, l'induction se comporte bien par rapport à la première de ces classifications et moins bien par rapport à l'autre. Quel est le choix qui brise cette symétrie ? Peut-on définir des fonctions zêta qui privilégient la classification à la Zelevinskii ?*

5.7 Lien avec la correspondance de Howe

5.7.1. Les fonctions zêta vont nous aider à compléter la preuve de la correspondance de Howe. Comme on a déjà vu à plusieurs étapes, elles induisent des entrelacements entre la représentation métaplectique et $V \otimes \widetilde{V}$ pour toute $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}\,(G_n)$. En effet, le morphisme

$$\begin{aligned} Z_\pi \quad &: \quad S_R\left(\mathcal{M}_{n,n}\right) \to V \otimes \widetilde{V} \\ Z_\pi\left(\Phi\right) \quad &= \quad \lim_{T\to 1} \frac{Z\left(\Phi, T, \pi\right)}{L\left(Tq^{-(n-1)/2}, \pi\right)}, \end{aligned}$$

pour toute fonction $\Phi \in S_R\left(\mathcal{M}_{n,n}\right)$, où on note $\lim_{T\to 1} \frac{Z(\Phi,T,\pi)}{L\left(Tq^{-(n-1)/2},\pi\right)}$ l'évaluation du polynôme $\frac{Z(\Phi,T,\pi)}{L\left(Tq^{-(n-1)/2},\pi\right)}$ en $T = 1$, définit bien un entrelacement non nul (par construction) de représentations.

Il va nous aider à construire d'autres entrelacements non nuls quand $n \neq m$. Soient $i \leq n \leq m$ trois entiers positifs.

5.7.2. On reprend les notations déjà utilisées à plusieurs étapes :

a) On notera chaque matrice $h \in \mathcal{M}_{m,n}$ par

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a \in \mathcal{M}_{m-i,n-i}, b \in \mathcal{M}_{i,n-i}, c \in \mathcal{M}_{m-i,i}, d \in \mathcal{M}_{i,i}.$$

b) On notera chaque $g \in G_n$ par

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}, g_1 \in \mathcal{M}_{n-i,n-i}, g_2 \in \mathcal{M}_{i,n-i}, g_3 \in \mathcal{M}_{n-i,i}, g_4 \in \mathcal{M}_{i,i}.$$

On pose $\overline{P_i} = \{g \in G_n : g_2 = 0\}$

c) On notera chaque $g' \in G_m$ par

$$g' = \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 \\ g'_3 & g'_4 \end{pmatrix}, g'_1 \in \mathcal{M}_{m-i,m-i}, g'_2 \in \mathcal{M}_{i,m-i}, g'_3 \in \mathcal{M}_{m-i,i}, g'_4 \in \mathcal{M}_{i,i}.$$

On pose $P'_i = \{g' \in G_m : g'_3 = 0\}$

5.7.3. Soient $g \in G_n$, $g' \in G_m$, $\Phi \in S_R(\mathcal{M}_{m,n})$. On pose $\Phi^i_{g,g'} \in S_R(\mathcal{M}_{i,i})$ définie par

$$\Phi^i_{g,g'}(g_i) = \Phi\left(g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} g'\right).$$

Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Irr}(G_i)$. On définit une application R-linéaire

$$Z^{m,n}_\pi : S_R(\mathcal{M}_{m,n}) \to \mathrm{ind}^{G_n}_{\overline{P_i}}\left(\nu^{\frac{i}{2}} 1_{n-i} \otimes \nu^{\frac{-n+i}{2}}\pi\right) \otimes \mathrm{ind}^{G_m}_{P'_i}\left(\nu^{\frac{-i}{2}} 1_{m-i} \otimes \nu^{\frac{m-i}{2}}\widetilde{\pi}\right),$$

où $Z^{m,n}_\pi(\Phi) : G_n \times G_m \to V \otimes \widetilde{V}$ est donnée par

$$Z^{m,n}_\pi(\Phi)(g, g') = Z_\pi\left(\Phi^i_{g,g'}\right).$$

Voyons que

$$Z^{m,n}_\pi(\Phi)(g, g') \in \mathrm{ind}^{G_n}_{\overline{P_i}}\left(\nu^{\frac{i}{2}} 1_{n-i} \otimes \nu^{\frac{-n+i}{2}}\pi\right) \otimes \mathrm{ind}^{G_m}_{P'_i}\left(\nu^{\frac{-i}{2}} 1_{m-i} \otimes \nu^{\frac{m-i}{2}}\widetilde{\pi}\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned} Z^{m,n}_\pi(\Phi)(pg, p'g') &= Z_\pi\left(\Phi^i_{pg,p'g'}\right) \\ &= Z_\pi\left(g_i \mapsto \Phi\left(g^{-1}p^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} p'g'\right)\right) \\ &= Z_\pi\left(g_i \mapsto \Phi\left(g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_4^{-1}g_i g'_4 \end{pmatrix} g'\right)\right) \\ &= \pi \otimes \widetilde{\pi}(g_4, g'_4)\, Z^{m,n}_\pi(\Phi)(g, g'). \end{aligned}$$

D'un autre côté, $Z^{m,n}_\pi$ est un entrelacement non nul (puisque Z_π est non nul).

Ainsi on a montré, pour $i = n$:

Proposition. *Pour toute* $\pi \in \mathrm{Irr}(G_n)$ *il existe* π', *un sous-quotient irréductible de* $\mathrm{ind}_{P'_n}^{G_m}\left(\nu^{\frac{-n}{2}} 1_{m-n} \otimes \nu^{\frac{m-n}{2}} \widetilde{\pi}\right)$ *tel que* $\pi \otimes \pi'$ *soit un quotient de* $\sigma_{n,m}$.

5.7.4. Cette proposition est très intéressante : non seulement on connaît $\theta(\pi)$ pour toute π mais on a aussi un morphisme *explicite*.

Par exemple ça nous aide à trouver les contre-exemples de la section 4.5 et comprendre l'un de deux faits pour lequels la correspondance thêta n'est pas bijective en caractéristique non banale. On sait (*cf.* [Vi2]) que toute représentation irréductible $\overline{\pi}$ en caractéristique positive se relève en une représentation en caractéristique 0 mais pas de *façon unique*. Soient π_1 et π_2 deux de ces relèvements : il se peut que, si la caractéristique du corps de coefficients est non banale, les réductions modulo l des images des morphismes $Z_{\pi_1}^{m,n}$ et $Z_{\pi_2}^{m,n}$ soient différentes.

C'est ce qui passe lorsque, par exemple, $n = 1$, $q^m \equiv 1 \mod l$, $q \not\equiv 1 \mod l$ et $\overline{\pi} = 1$. On peut relever $\overline{\pi}$ en $\pi_1 = 1$ et $\pi_2 = \nu^m$ qui induisent les entrelacements

1. $f \mapsto f(0)$
2. $f \mapsto \int_{F^m} f(x)dx$

de $\sigma_{1,m}$ vers $1_1 \otimes 1_m$ et vers $1_1 \otimes \nu^{-1} 1_m$ respectivement.

L'autre problème en caractéristique non banale est l'apparition de représentations semi-simples et de scindages exceptionnels de suites. On voit ça sur les faits suivants :

1. Les résultats du chapitre 3 ne sont pas vrais. Par exemple, $\nu^{-\frac{1}{2}} \times \nu^{\frac{1}{2}}$ est semi-simple de longueur 2 lorsque $q \equiv 1 \mod l$ et $l \neq 2$.
2. La suite 1.1.3(a) du premier chapitre est scindée ce qui nous donne une plus grande dimension de l'espace des entrelacements.

Annexe A

Une autre preuve de la correspondance

Le but de cette annexe est de montrer la conjecture de Howe en utilisant des techniques complètement différentes de celles utilisées dans le reste de la thèse. Cette preuve est due à Howe lui-même : nous n'avons fait que l'adapter au cas où le corps de coefficients n'est pas le corps des nombres complexes.

On conserve les notations des chapitres précédents : F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, D une algèbre à division de centre F, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{P} = \varpi\mathcal{O}$ son idéal maximal, $k_D = \mathcal{O}/\mathcal{P}$ son corps résiduel et q le cardinal de k_D. Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique $l \neq p$. Remarquons qu'on ne fait aucune restriction sur la caractéristique de F.

Le travail sera un peu plus géométrique. Soient V et V' deux D-espaces vectoriels (à droite) de dimension finie sur D. On note $X = \mathrm{Hom}_D(V', V)$, $G = GL_D(V)$, $G' = GL_D(V')$, $S = S_R(X)$ l'ensemble des fonctions de X dans R localement constantes à support compact.

Considérons la représentation naturelle σ de $G \times G'$ dans $S = S_R(X)$. Plus précisément :

$$\sigma(g, g') f = f_{g,g'} : \quad \begin{array}{l} X \to R \\ \phi \longmapsto f(\phi_{g,g'}) \end{array}$$

où $\phi_{g,g'} \in \mathrm{Hom}_D(V', V)$ est définie par $\phi_{g,g'} = g \circ \phi \circ g'^{-1}$.

A un caractère près c'est la représentation métaplectique restreinte à $G \times G'$ (*cf.* [MVW, 3.III.1]) et, si l'on prend des bases de V et V', on retrouve la formulation du reste de la thèse.

Soit (π, W) une R-représentation de G, *i.e.* une représentation de G dans un espace vectoriel W sur R. Supposons (π, W) irréductible.

Dans cette annexe on va montrer que, si l est banal pour G et G' (*cf.* 2.1.1), et que (π_1', W_1'), (π_2', W_2') sont deux R-représentations irréductibles de G' telles que $W \otimes W_i'$ soit, pour $i = 1, 2$, un quotient de σ alors π_1' et π_2' sont équivalentes et

$$\dim\left(\operatorname{Hom}\left(\sigma, \pi \otimes \pi_1'\right)\right) = 1.$$

C'est la conjecture de Howe. Si cette assertion est vraie on note $\theta(\pi) = \pi_1'$ et on dit que $\theta(\pi)$ correspond à π (par la correspondance de Howe).

Comme on a vu dans 4.5, cette conjecture n'est pas toujours vraie si l n'est pas banal. Pourtant, on verra en A.3.4 que même pour l non banal, il existe beaucoup de représentations π pour lesquelles elle est bien vérifiée.

A.1 Quelques rappels

On va rappeler quelques définitions et propriétés classiques qui seront utilisées au long de cet appendice. Soit toujours V un D-espace vectoriel (à droite) de dimension finie n sur D.

Définition A.1.1. Un réseau L de V est un sous-$\mathcal{O}$-module de V libre de rang maximal.

Théorème A.1.2. *Soit L un réseau de V. Il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V telle que*

$$L = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} e_i \mathcal{O}.$$

Démonstration. Cf. [We1, II.3. Theorem 1]. □

En particulier, L est un sous-groupe compact ouvert de V et l'ensemble des réseaux forme un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans V.

Théorème A.1.3. *Soient L_1 et L_2 deux réseaux de V. Il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V et des entiers $\{t_1, \ldots, t_n\}$ tels que*

$$\begin{aligned} L_1 &= \bigoplus_{1 \leq i \leq n} e_i \mathcal{O}, \\ L_2 &= \bigoplus_{1 \leq i \leq n} e_i \varpi^{t_i} \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Démonstration. Cf. [We1, II.3. Theorem 2]. □

Si L est un réseau, $L\varpi$ est aussi un réseau et le quotient $L/L\varpi$ est un k_D-espace vectoriel de dimension n.

Proposition A.1.4. *Soit L un réseau de V. Soient $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de L et notons $\overline{e}_i \in L/L\varpi$ leurs projections. Si les $\overline{e}_i$ forment une base de $L/L\varpi$ alors les e_i forment aussi une base de L et de V.*

Démonstration. Voir, par exemple, [Ho5, Proposition 2.1]. □

Soient L_1 et L_2 deux réseaux de V et V' respectivement. Soit $T : L_1 \to L_2$ un $\mathcal{O}$-morphisme. Alors $T(L_1\varpi) \subset L_2\varpi$ et donc T passe au quotient et définit un morphisme d'espaces vectoriels qui sera noté

$$\overline{T} : L_1/L_1\varpi \to L_2/L_2\varpi.$$

L'action naturelle de G sur V nous permet d'introduire les sous-groupes compacts de G en termes des réseaux de V.

Proposition A.1.5. *Soit L un réseau de V. Le stabilisateur K_L dans G de L est un sous-groupe compact maximal de G. Tout sous-groupe compact maximal stabilise un réseau et tous les stabilisateurs des réseaux sont conjugués entre eux.*

Démonstration. Voir, par exemple, [Ho5, proposition 2.2]. □

Proposition A.1.6. *Soit L un réseau de V. Tout réseau L' stabilisé par K_L est de la forme $L' = L\varpi^c$, pour un entier c.*

Démonstration. Voir, par exemple, [Ho5, lemma 2.1]. □

Proposition A.1.7. *Soient $L_2 \subset L_1$ deux réseaux de V. Notons J_{L_2,L_1} le sous-groupe de G défini par :*

$$J_{L_2,L_1} \quad = \quad \{g \in K_{L_1} : (g-1)L_1 \subset L_2\}$$

J_{L_2,L_1} est un sous-groupe de K_{L_1} et l'ensemble des J_{L_2,L_1} lorsqu'on fait varier L_2 dans L_1 est un système de voisinages de 1 dans G. De plus, si $L_2 \subset L_3 \subset L_1$ alors $J_{L_2,L_1} \subset J_{L_3,L_1}$.

Soient L et L' deux réseaux dans des espaces vectoriels V et V' respectivement. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L, L')$ des D-morphismes $f \in \mathrm{Hom}_D(V, V')$ tels que $f(L) \subset L'$ est un réseau de $\mathrm{Hom}_D(V, V')$. En effet, on a une injection :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L, L') & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_D(V, V') \\ f & \mapsto & f \otimes D. \end{array}$$

A.2 La representation métaplectique σ

A.2.1. Pour pouvoir montrer la conjecture de Howe il nous faut, d'abord, des renseignements très précis sur la représentation σ. Ce travail sera réalisé dans cette section. Précédemment, on avait cherché à trouver des suites de composition de cette représentation ou de ses foncteurs de Jacquet. Ici on va essayer de comprendre les sous-espaces σ^K des vecteurs K-invariants, K étant un sous-groupe compact de G. C'est un travail plus proche de la technique des types et qui nous donne des renseignements différents : on utilise les méthodes qui ont permis de montrer la conjecture en toute généralité (pour les paires de type I).

Il s'agit, en bref, de trouver, pour des sous-groupes compacts quelconques K et K' de G et G', un foncteur $\mathbf{f}_{K,K'}$ exact de la catégorie de $G \times G'$-modules vers la catégorie des $\mathcal{H}(G,K) \times \mathcal{H}(G',K')$-modules, où $\mathcal{H}(G,K)$ et $\mathcal{H}(G',K')$ sont les algèbres de Hecke relatives à K et K' respectivement, tel que $\mathbf{f}_{K,K'}(\sigma)$ soit un $\mathcal{H}(G,K)$-module cyclique non nul et aussi $\mathcal{H}(G',K')$-cyclique de même générateur. Cela implique, comme dans [MVW, 5.I.9], la conjecture de Howe.

A.2.2. Fixons $L'_0 \subset V'$ et $L_0 \subset V$ deux réseaux. Posons

$$\begin{aligned} K_0 &= K_{L_0} \\ K'_0 &= K'_{L'_0}. \end{aligned}$$

On commence par étudier les espaces σ^{K_0}. On note aussi $\Lambda_0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L'_0, L_0) \subset X$: c'est le réseau de X des fonctions f telles que $f(L'_0) \subset L_0$. Il est invariant par K_0 et K'_0. Notons $\Omega^0(V')$ l'ensemble des réseaux de V' et $\Omega^0(X)^{K_0}$ l'ensemble des réseaux de X invariants par K_0. Par A.1.2, G' agit transitivement sur $\Omega^0(V')$ et donc le morphisme $g' \mapsto g'L'_0$ induit un isomorphisme $G'/K'_0 \simeq \Omega^0(V')$.

Proposition. *Le morphisme*

$$\begin{array}{lcl} \Omega^0(V') & \to & \Omega^0(X)^{K_0} \\ L' & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0) \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. Pour tout réseau $L' \in \Omega^0(V')$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)$ est un réseau de $\Omega^0(X)$ K_0-invariant.

Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L'_1, L_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L'_2, L_0)$, par A.1.3, on a que $L'_1 \simeq L'_2$. Si $\Lambda \in \Omega^0(X)^{K_0}$, notons L' le réseau $L'_\Lambda = \bigcap\limits_{\phi \in \Lambda} \phi^{-1}(L_0)$, alors $\phi(L') \subset L_0$ pour tout $\phi \in \Lambda$ donc $\Lambda \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)$.

$\square$

A.2.3. Pour tout $\Lambda \subset X$ on note $\mathbf{1}_\Lambda : X \to R$ la fonction caractéristique de l'ensemble Λ, *i.e.*,

$$\mathbf{1}_\Lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Lambda, \\ 0 & \text{si } x \notin \Lambda. \end{cases}$$

L'application $\mathbf{1}$ définie par $\mathbf{1}(\Lambda) = \mathbf{1}_\Lambda$ est donc une injection $\Omega^0(X) \hookrightarrow S_R(X)$. Si l'on note $S_R(X)^{K_0}$ le sous-espace de $S_R(X)$ des fonctions K_0-invariantes, alors évidemment

$$\mathbf{1}\left(\Omega^0(X)^{K_0}\right) \subset S_R(X)^{K_0}.$$

Théorème. *L'image de* $\mathbf{1} : \Omega^0(X)^{K_0} \to S_R(X)^{K_0}$ *engendre* $S_R(X)^{K_0}$ *en tant que* R*-espace vectoriel.*

Le théorème sera démontré dans les paragraphes A.2.5, A.2.6 et A.2.7.

A.2.4. On va reformuler ce théorème pour mieux comprendre le rôle du groupe G'. Rappelons le concept d'algèbre de Hecke (*cf.* 2.1.13). Pour tout groupe G défini sur F, notons $\mathcal{H}_R(G)$, l'espace des fonctions $f : G \to R$ localement constantes à support compact. Fixons une mesure de Haar $\mu^\times$ de G à valeurs dans R. Muni du produit de convolution, noté $*$, $\mathcal{H}_R(G)$, est une algèbre, appelée *algèbre de Hecke* de G, et on a un isomorphisme de catégories entre :

1. La catégorie des représentations de G
2. La catégorie des modules sur $\mathcal{H}_R(G)$.

On passe de l'une à l'autre par la formule :

$$\pi(\phi)\, w = \int_G \phi(h)\, \pi(h)\, w\, d\mu^\times(h),$$

pour toute représentation (π, W) de G et où $\phi \in \mathcal{H}_R(G)$ et $w \in W$.

D'après la proposition A.2.2 on a que $\Omega^0(X)^{K_0} \simeq \Omega^0(V') \simeq G'/K_0'$ en tant que G'-modules.

Notons indifféremment σ l'action de G, G', ou des algèbres de Hecke $\mathcal{H}_R(G)$, $\mathcal{H}_R(G')$. Notons

$$\begin{array}{rccl} e : & \mathcal{H}_R(G') & \longrightarrow & S_R(X) \\ & \phi & \longmapsto & \sigma(\phi)\, \mathbf{1}_{\Lambda_0} = \int_{G'} \phi(g')\, \mathbf{1}_{\Lambda_{g'}}\, dg' \end{array}$$

où $\Lambda_{g'} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(g'^{-1}L_0', L_0)$. La fonction $\mathbf{1}_{\Lambda_0}$ est invariante sous l'action de K_0 et donc e induit un G'-morphisme $e : \mathcal{H}_R(G') \to S_R(X)^{K_0}$.

Le théorème A.2.3 s'écrit alors :

Théorème. *Le morphisme* $e : \mathcal{H}_R(G') \to S_R(X)^{K_0}$ *est surjectif, i.e.* $S_R(X)^{K_0}$ *est un* $\mathcal{H}_R(G')$*-module cyclique de générateur* $\mathbf{1}_{\Lambda_0}$.

Démonstration. On utilise que, si $L'_1 = g'^{-1}(L'_0)$ alors

$$\mathbf{1}_{\mathrm{Hom}\left(L'_1, L_0\right)} = \sigma(g')\,\mathbf{1}_{\Lambda_0}.$$

□

A.2.5. *Démonstration du théorème A.2.3.* Notons $\Lambda_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L'_0, L_0\varpi^n) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L'_0\varpi^{-n}, L_0)$. Les Λ_n forment une base des voisinages K_0-invariants de 0 dans X.

L'idée de la démonstration du théorème A.2.3 est la suivante : de la même façon que l'espace $S_R(X)$ est engendré par les fonctions caractéristiques des ensembles ouverts compacts de X, on va décrire un ensemble de fonctions qui engendre l'espace $S_R(X)^{K_0}$ en tant que R-espace vectoriel. Il suffira de montrer le théorème pour une fonction dans cet ensemble, *i.e.* il suffira de montrer que toute fonction dans cet ensemble est de la forme $\sigma(\phi)\,\mathbf{1}_{\Lambda_0}$ avec $\phi \in \mathcal{H}_R(G')$.

Proposition. *Soit* K *un sous-groupe compact de* G. *Pour tout* $f \in S_R(X)^K$ *il existe* $\theta_1, \ldots, \theta_r$ *des* K*-orbites dans* X, *et* $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$ *tels que* $f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mathbf{1}_{\theta_j + \Lambda_{i_j}}$, *avec* $\alpha_j \in R$.

Démonstration. Soit $f \in S_R(X)^K$. Comme f est localement constante et K compact, pour toute K-orbite θ dans X, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f est constante sur $\theta + \Lambda_n$. Les ensembles de la forme $\theta_1 + \Lambda_{n_1}$ et $\theta_2 + \Lambda_{n_2}$ sont ou bien disjoints ou bien l'un contient l'autre. Ainsi, pour tout $\alpha \in R$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $f(g) = \alpha$ est une union finie et disjointe d'ensembles de la forme $\theta_i + \Lambda_{n_i}$, d'où la proposition. □

Il suffit donc de montrer le théorème pour une fonction de la forme $\mathbf{1}_{\theta+\Lambda}$ avec $\Lambda = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)$, $L' \in \Omega(V')$, et θ une K_0-orbite dans X.

A.2.6. Décrivons maintenant l'allure d'un ensemble de la forme $\theta + \Lambda$. Soit $T_0 \in \theta$ et posons $B = T_0^{-1}(L_0) \cap L'$. Alors,

$$\theta + \Lambda \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0).$$

En effet, si $T_1 \in \theta$, il existe $k \in K_0$ tel que $kT_1 = T_0$; ainsi $T_1(B) \subset L_0$ et donc $T_1 + \Lambda \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0)$.

D'après le théorème A.1.3, il existe une décomposition $V' = V_1' \oplus V_2'$ telle que :

$$\begin{array}{ll} B = (B \cap V_1') \oplus (B \cap V_2') & L' = (L' \cap V_1') \oplus (L' \cap V_2') \\ B \cap V_1' \subset (L' \cap V_1')\, \varpi & B \cap V_2' = L' \cap V_2'. \end{array}$$

Pour tout $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0)$, on note

$$\overline{T} : B/B\varpi \to L_0/L_0\varpi$$

sa réduction et

$$E = (B \cap V_1') \,/\, (B \cap V_1')\, \varpi,$$

vu comme sous-espace vectoriel de $B/B\varpi$.

Lemme.

$$\theta + \Lambda = \left\{ T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0) : \overline{T} \textit{ injectif sur } E \right\}.$$

Démonstration. Soit $T \in \theta + \Lambda$. Alors il existe $\lambda \in \Lambda$ et $k \in K_0$ tels que

$$(\lambda + kT_0) = T.$$

Ainsi, si

$$(\lambda + kT_0)(b) = l_0\varpi$$

où $b \in B \cap V_1'$ et $l_0 \in L_0$, alors, puisque $B \cap V_1' \subset (L' \cap V_1')\, \varpi$, il existe $l_1' \in L' \cap V_1'$ tel que $b = l_1'\varpi$ et donc

$$(\lambda + kT_0)(l_1'\varpi) = l_0\varpi$$

et donc $(\lambda + kT_0)(l_1') = l_0$. Ainsi $l_1' \in T_0^{-1}(L_0) \cap L' \cap V_1' = B \cap V_1'$ et donc $b \in (B \cap V_1')\, \varpi$, et donc $\overline{T}$ est injectif.

Réciproquement, si $T_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0)$ et $\overline{T_1}$ est injective sur E, par A.1.4, il existe $k \in K_0$ tel que $kT_1 = T$ sur V_1'. Notons $\lambda = kT_1 - T \in \Lambda$ et voyons que $\lambda \in \Lambda = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} \lambda(L') & = & \lambda((L' \cap V_1') \oplus (L' \cap V_2')) \\ & = & \lambda(L' \cap V_2') \\ & = & \lambda(B \cap V_2') \\ & \subset & L_0. \end{array}$$

□

A.2.7. En changeant f par $f(g'\cdot)$, avec g' bien choisi, on peut bien supposer (*cf.* A.1.5) $B = L_0'$. On garde les notations du paragraphe précédent.

Posons d'un autre côté :

$$B_1 = \left\{T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L_0' \cap V_1', L_0\right) : \overline{T} \text{ injective } \right\}.$$

Ainsi

$$\theta + \Lambda = B_1 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L_0' \cap V_2', L_0\right).$$

Or, par l'isomorphisme

$$S_R(X) \quad \simeq \quad S_R\left(\mathrm{Hom}_D\left(V_1', V\right)\right) \otimes S_R\left(\mathrm{Hom}_D\left(V_2', V\right)\right),$$

où

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1}_{\theta+\Lambda} & \text{s'envoie sur} & \mathbf{1}_{B_1} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L_0' \cap V_2', L_0\right)} \qquad \text{et} \\ \mathbf{1}_{\Lambda_0} & \text{s'envoie sur} & \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L_0' \cap V_1', L_0\right)} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L_0' \cap V_2', L_0\right)}, \end{array}$$

on voit qu'il suffit de montrer le cas où $V_2' = \{0\}$; en effet, si $\mathbf{1}_{B_1} = \sigma(\phi)\mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L_0' \cap V_1', L_0\right)}$ avec $\phi \in S_R\left(\mathrm{Hom}_D\left(V_1', V\right)\right)$, alors $\mathbf{1}_{\theta+\Lambda} = \sigma(\phi \otimes 1)\mathbf{1}_{\Lambda_0}$. On doit donc juste exprimer la fonction caractéristique de

$$\left\{T \in \Lambda_0 : \overline{T} \text{ est injectif}\right\}$$

en fonction des $\mathbf{1}_\Lambda$, $\Lambda \in \Omega(X)^{K_0}$.

Notons f_i la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\mathrm{supp} f_i = \left\{T \in \Lambda_0 : \overline{T} \text{ est de rang } i\right\}.$$

On s'intéresse à f_m où $m = \dim_D V'$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\Lambda_0} &= \sum_{i=0}^{m} f_i \\ \mathbf{1}_{\Lambda_1} &= f_0. \end{aligned}$$

L'idée est la suivante : on va trouver d'autres équations reliant les f_i pour conclure que f_m est une combinaison linéaire des fonctions caractéristiques de la forme $\mathbf{1}_\Lambda$, $\Lambda \in \Omega(X)^{K_0}$.

Pour tout réseau $L' \subset V'$ tel que $L_0' \subset L' \subset L_0'\varpi^{-1}$, d'après le théorème A.1.3, L' est déterminé par son image dans $\overline{V'} = \left(L_0'\varpi^{-1}\right)/L_0'$. Il est clair que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L', L_0\right) \cap \mathrm{supp}\, f_i \neq \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{codim}\left(L'/L_0', \overline{V'}\right) \geq i \tag{a}$$

et, si $T \in \Lambda_0$, alors $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)$ si et seulement si $L'/L'_0 \subset \ker \overline{T}$.

Notons

$$\begin{aligned} C_i &= \left\{L' \in \Omega(V') : L'_0 \subset L' \subset L'_0\varpi^{-1}, \mathrm{codim}\left(L'/L'_0, \overline{V'}\right) = i\right\}, \\ g_i &= \sum_{L' \in C_i} \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)}. \end{aligned}$$

Puisque chaque fonction $\mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)}$, $L' \in C_i$ peut être écrite sous la forme $\sigma(g')\mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L'_0, L_0\right)}$ avec $g' \in G'$, on a que

$$g_i \in \sigma\left(S_R\left(G'\right)\right)\mathbf{1}_{\Lambda_0}.$$

Proposition. *Il existe $a_{ij} \in R$ tels que*

$$g_i = f_i + \sum_{i>j} a_{ij} f_j.$$

Démonstration. En effet, la valeur de g_i en $T \in \Lambda_0$ est, par définition, le nombre (modulo l) des $L' \in C_i$ tel que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)$, *i.e.* c'est le nombre de sous-espaces de $\left(L'_0\varpi^{-1}\right)/L'_0$ de codimension plus grande ou égale à i contenus dans $\ker \overline{T}$; ce qui ne dépend que du rang de $\overline{T}$

1. Si rang $\left(\overline{T}\right) = i$ alors il n'y a qu'un seul tel sous-espace, à savoir, $\ker \overline{T}$.
2. Il y a $a_{ij} = \frac{\left(q^{m-j}-1\right)\left(q^{m-j-1}-1\right)\ldots\left(q^{m-i+1}-1\right)}{\left(q^{i-j}-1\right)\left(q^{i-j-1}-1\right)\left(q-1\right)}$ sous-espaces de dimension $m-i$ dans un espace de dimension $m-j$ défini sur k_D.

Ainsi

$$g_i(T) = f_i(T) + \sum_{i>j} a_{ij} f_j(T),$$

où les a_{ij} sont définis par la formule précédente. □

On inverse les équations de la proposition : il existe donc $b_{ij} \in R$ tels que

$$f_i = g_i + \sum_{i>j} b_{ij} g_j.$$

Comme $g_i \in \sigma\left(S_R\left(G'\right)\right)\mathbf{1}_{\Lambda_0}$, on trouve finalement $f_i \in \sigma\left(S_R\left(G'\right)\right)\mathbf{1}_{\Lambda_0}$ ce qui achève la preuve du théorème A.2.3.

A.2.8. On voudrait maintenant généraliser ce théorème à tout sous-groupe compact (non nécessairement maximal) de G.

Soit $L \subset L_0$ un sous-réseau. On rappelle (*cf.* A.1.7) qu'on note

$$J_L = J_{L,L_0} = \{g \in K_{L_0} : (g-1)L_0 \subset L\} \subset K_{L_0} \cap K_L.$$

On veut calculer, de même, un système de générateurs de $S_R(X)^{J_L}$ en tant que G'-module. Or, $S_R(X)^{J_L}$ est engendré en tant que R-espace vectoriel, d'après la proposition A.2.5 appliquée à J_L, par les fonctions caractéristiques des ensembles de la forme $\theta + \Lambda_n$ où θ est une J_L-orbite dans X et $\Lambda_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_0', L\varpi^n)$ est un voisinage (aussi petit que l'on veut) de 0 dans X. Le premier pas est donc de trouver une description explicite des J_L-orbites θ comme dans les paragraphes précédents. On le fera dans A.2.9.

Après, dans A.2.10, on calculera un système de générateurs de $S_R(X)^{J_L}$ en tant que G'-module. L'espace $S_R(X)^{J_L}$ est beaucoup plus grand que $S_R(X)^K$ à cause de la redondance de vecteurs fixés par des sous-groupes compacts contenus dans K et qui contiennent strictement J_L et on verra qu'il n'est pas G'-cyclique (en général).

A.2.9. Soient T et T' deux éléments de X.

Lemme. *T et T' appartiennent à la même J_L-orbite si, et seulement si :*

1. $T^{-1}(L_0) = T'^{-1}(L_0)$ *et* $T^{-1}(L) = T'^{-1}(L)$.
2. *T et T' induisent des morphismes égaux*

$$T, T' : T^{-1}(L_0)/T^{-1}(L) \to L_0/L.$$

Démonstration. Supposons $T' = jT$ avec $j \in J_L$. Puisque J_L laisse invariant L_0 et L, il est clair que

$$T^{-1}(L_0) = T'^{-1}(L_0) \qquad T^{-1}(L) = T'^{-1}(L).$$

Comme $(j-1)L_0 \subset L$, on a $(j-1)T \in \mathrm{Hom}(T^{-1}(L_0), L)$, *i.e.*

$$T + \mathrm{Hom}\left(T^{-1}(L_0), L\right) = T' + \mathrm{Hom}\left(T'^{-1}(L_0), L\right),$$

i.e. T et T' induisent des morphismes égaux

$$T, T' : T^{-1}(L_0)/T^{-1}(L) \to L_0/L.$$

Réciproquement, supposons que $T, T' \in X$ satisfont à 1. et 2. et montrons qu'ils sont dans la même J_L-orbite. Puisque

$$\ker T = T^{-1}(\{0\}) = T^{-1}\left(\bigcap_{n\geq 0}(L_0\varpi^n)\right) = \bigcap_{n\geq 0}\left(T^{-1}(L_0)\varpi^n\right),$$

la condition 1. implique que $\ker T = \ker T'$ et donc les deux morphismes se factorisent *via* $\ker T$ dans $\mathrm{Hom}\left(V'/\ker T, V\right)$. La condition $T = jT'$ dans X équivaut à la condition $T = jT'$ dans $\mathrm{Hom}\left(V'/\ker T, V\right)$, et ainsi, on peut se ramener au cas où T et T' sont injectifs. On peut donc supposer que $T^{-1}\left(L_0\right)$ est un réseau. Notons

$$\begin{aligned} \overline{T} &: T^{-1}\left(L_0\right)/T^{-1}\left(L_0\right)\varpi \to L_0/L_0\varpi, \\ \overline{T'} &: T^{-1}\left(L_0\right)/T^{-1}\left(L_0\right)\varpi \to L_0/L_0\varpi. \end{aligned}$$

les réductions respectives. Montrons que $\overline{T}$ et $\overline{T}$ sont aussi injectifs : si $\overline{T}\left(\overline{x}\right) = \overline{T'}\left(\overline{x'}\right)$, on relève $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ en x et x' respectivement et on a que $T\left(x - x'\right) \in L_0\varpi$ et donc $\left(x - x'\right)\varpi^{-1} \in T^{-1}\left(L_0\right)$ d'où $x - x' \in T^{-1}\left(L_0\right)\varpi$ et donc $\overline{x} = \overline{x'}$.

Soit $\{v_1, \ldots, v_m\}$ une base de $T^{-1}\left(L_0\right)$, $\left\{\overline{T}(v_1), \ldots, \overline{T}(v_m)\right\}$ sont donc indépendants sur k_D et on peut donc trouver une base de $L_0/L_0\varpi$ qui prolonge ces éléments. On relève et on trouve :

$$\{T(v_1), \ldots, T(v_m), u_1, \ldots, u_s\}$$

une base de L_0 et, en agissant de la même façon avec T',

$$\{T'(v_1), \ldots, T'(v_m), w_1, \ldots, w_s\},$$

une autre base de L_0.

Supposons $\overline{T} = \overline{T'}$. Ainsi, on peut supposer

$$\{T(v_1), \ldots, T(v_m)\} = \{T'(v_1), \ldots, T'(v_m)\},$$

on peut alors prendre $u_i = w_i$ pour $i = 1, \ldots, s$ et, si l'on définit $j : L_0 \to L_0$ par

$$j\left(T\left(v_i\right)\right) = T'(v_i) \qquad\qquad j(u_i) = u_i,$$

la condition (2) implique que $T(v_i) = T'(v_i) \mod L$,*i.e.* j est l'identité sur L_0/L, c'est-à-dire, $j \in J_L$. Mais, $jT = T'$ par construction ; cela achève la preuve dans ce cas.

Ceci nous permet de travailler dans des espaces vectoriels où on a toute l'algèbre linéaire à notre disposition. Il suffit juste de montrer maintenant, d'après ce qui précède, qu'il existe $j \in J_L$ tel que

$$\overline{jT} = \overline{T'}.$$

La condition (2) veut dire que T et T' coïncident sur $T^{-1}\left(L_0\right)/T^{-1}\left(L\right)$ modulo L donc, si $L \subset L_0\varpi$, on a bien que $\overline{T} = \overline{T'}$.

Sinon, $\overline{M} = L/\left(L \cap L_0\varpi\right)$ s'identifie à un sous-espace non nul de $L_0/L_0\varpi$. Prenons une base $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_r$ de cet espace et relevons-la en $z_1, \ldots, z_r$ en des éléments de L. Soit aussi $\overline{z'}_1, \ldots, \overline{z'}_s$ une base d'un complémentaire $\overline{M}^c$ de $\overline{M}$ dans $L_0/L_0\varpi$ et relevons-la en des éléments $z'_1, \ldots, z'_s$ de L.

Notons M le sous-module de L engendré par $z_1, \ldots, z_r$ et $P(M)$ le sous-groupe de K qui agit trivialement sur L_0/M. Puisque $M \subset L$ on a bien que $P(M)$ est un sous-groupe de J_L.

On note aussi $P\left(\overline{M}\right)$ l'image du morphisme $P(M) \to GL\left(L_0/L_0\varpi\right)$. $P\left(\overline{M}\right)$ agit trivialement sur $\overline{M}^c$ et, par algèbre linéaire de base, deux éléments $v, v' \in L_0/L_0\varpi$ sont dans la même $P\left(\overline{M}\right)$-orbite s'ils coïncident sur $\overline{M}^c$. (En fait $P\left(\overline{M}\right)$ c'est le sous-groupe de $GL\left(L_0/L_0\varpi\right)$ qui agit trivialement sur $\left(L_0/L_0\varpi\right)/\left(L/\left(L \cap L_0\varpi\right)\right) \simeq \; L_0/\left(L + L_0\varpi\right)$.)

Or, à nouveau, par la condition (2) $\overline{T}$ et $\overline{T'}$ coïncident sur $\overline{M}^c$ et donc $\overline{T}$ et $\overline{T'}$ sont dans la même $P\left(\overline{M}\right)$-orbite, *i.e.* il existe $p \in P(M) \subset J_L$ tel que $\overline{pT} = \overline{T'}$ ce qui achève finalement la preuve du lemme. □

A.2.10. On va appliquer ce lemme pour trouver des générateurs de l'espace $S_R\left(X\right)^{J_L}$.

Proposition. *Pour tout* $L \subset L_0$, $S_R\left(X\right)^{J_L}$ *est engendré par les fonctions caractéristiques des ensembles de la forme* $T + \mathrm{Hom}(L', L)$ *avec* $L' \subset L'_0$ *un réseau et* $T \in \mathrm{Hom}(L', L_0)$.

Démonstration. D'après la proposition A.2.5, comme dans la preuve du théorème A.2.3, il suffit de montrer que toute fonction de la forme $\mathbf{1}_{\theta+\Lambda_n}$ avec θ une J_L-orbite dans X et Λ_n de la forme $\Lambda_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L'_0, L\varpi^n\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(L'_0\varpi^{-n}, L\right)$, peut être écrit sous la forme

$$\sum_{g'_i \in G', 1 \leq i \leq r} \phi\left(g'_i\right) \mathbf{1}_{T+\mathrm{Hom}(L'_i, L)},$$

où $L'_i = L'_0 g'^{-1}$ est un sous-réseau pour $1 \leq i \leq r$ et $\phi\left(g'_i\right) \in R$. Puisque, pour tout $m > n$, une fonction de la forme $\mathbf{1}_{\theta+\Lambda_n}$ est une somme finie de fonctions de la forme $\mathbf{1}_{\theta+\Lambda_m}$, on peut supposer n aussi grand que l'on veut.

Fixons $T \in \theta$. Montrons qu'on peut choisir $V'_1 \subset V'$ tel que

$$V'_1 \oplus T^{-1}\left(0\right) = V' \text{ et } L'_0 = \left(L'_0 \cap T^{-1}\left(0\right)\right) \oplus \left(L'_0 \cap V'_1\right).$$

En effet, considérons l'injection canonique $\left(L'_0 \cap T^{-1}\left(0\right)\right) \hookrightarrow L'_0$. Elle passe au quotient donnant une injection

$$\left(L'_0 \cap T^{-1}\left(0\right)\right) / \left(L'_0 \cap T^{-1}\left(0\right)\right)\varpi \hookrightarrow L'_0/L'_0\varpi.$$

Soit $\{l_1, \ldots, l_t\}$ une base de $(L_0' \cap T^{-1}(0))$ et notons $\{\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_t}\}$ sa réduction dans $(L_0' \cap T^{-1}(0)) / (L_0' \cap T^{-1}(0)) \varpi$. On prolonge l'ensemble $\{\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_t}\}$ en $\{\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_t}, \overline{l_1'}, \ldots, \overline{l_s'}\}$ une base de $L_0'/L_0'\varpi$. On la relève (*cf.* proposition A.1.4) en une base $\{l_1, \ldots, l_t, l_1', \ldots, l_t'\}$ de L_0. On peut prendre V_1' le sous-espace de V' engendré par $\{l_1', \ldots, l_t'\}$.

Ainsi T est injectif dans V_1' et $T^{-1}(L_0) \cap V_1'$ est un réseau de V_1'.

On va choisir n suffisamment grand pour que

$$T^{-1}(L_0) \cap V_1' \subset L_0'\varpi^{-n+1}. \tag{a}$$

On rappelle que l'on veut décrire la fonction $\mathbf{1}_{\theta+\Lambda_n}$.

Lemme. *Avec ces conditions, si $T' \in \theta + \Lambda_n$,*

$$T'^{-1}(L_0) \cap V_1' = T^{-1}(L_0) \cap V_1'. \tag{b}$$

En particulier, tout $T' \in \theta + \Lambda_n$ sera injectif dans V_1'.

Démonstration. Si $x' \in T^{-1}(L_0) \cap V_1'$ alors $x' \in L_0'\varpi^{-n+1}$ et donc pour tout $k \in J_L$ et tout $\lambda \in \Lambda_n$,

$$(kT + \lambda)(x') \in L_0 + L\varpi \subset L_0.$$

Inversement, soit $x' \in V_1'$ tel que

$$(kT + \lambda)(x') = l_0 \in L_0.$$

Soit $p = \max\{i \in \mathbb{Z} : x' \in L_0'\varpi^i\}$ et $l_0' \in L_0'$ tel que $x' = l_0'\varpi^p$. ainsi

$$(kT + \lambda)(l_0'\varpi^p) = l_0$$

et donc il existe $l_1 \in L_0$ tel que

$$kT(l_0'\varpi^p) = l_0 + l_1\varpi^{p+n}.$$

Supposons $p + n < 0$. Alors

$$x' = l_0'\varpi^p \in \left(T^{-1}(L_0) \cap V_1'\right)\varpi^{p+n} \subset L_0'\varpi^{p+1},$$

par (a), ce qui est absurde.

On a alors $p + n \geq 0$ et $kT(x') \in L_0$, donc $T(x') \in L_0$. □

On va décrire maintenant, à l'aide du lemme A.2.9, l'ensemble $\theta + \Lambda_n$. Posons

$$A = \left(T^{-1}(0) \cap L_0'\varpi^{-n}\right) \oplus \left(T^{-1}(L_0) \cap V_1'\right).$$

Lemme. *Avec ces notations*

$$\theta + \Lambda_n = \{T' \in T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L), T' \textit{ satisfait à (b)}\}. \tag{c}$$

Démonstration. L'ensemble A est construit pour que

$$\Lambda_n \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L),$$

et, d'après le lemme A.2.9, pour que

$$\theta \subset T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L),$$

et donc

$$\theta + \Lambda_n \subset T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L).$$

De plus, d'après le lemme précédent, tous les $T' \in \theta + \Lambda_n$ vérifient l'équation (b), d'où l'inclusion

$$\theta + \Lambda_n \subset \{T' \in T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L), T' \text{ satisfait à (b)}\}.$$

Réciproquement, soit $T' \in T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L)$ qui satisfait à (b). Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T^{-1}(0) \cap L_0'\varpi^{-n}, L) \subset \Lambda_n$, il suffit de montrer que, si $T' \in T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T^{-1}(L_0) \cap V_1', L)$ satisfait à (b), alors $T' \in \theta$, *i.e.* T' satisfait aux conditions 1. et 2. du lemme A.2.9.

La condition 1. est vérifiée grâce par l'équation (b). Puisque $T' \in T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T^{-1}(L_0) \cap V_1', L)$ on a que T et T' induisent des morphismes égaux

$$T, T' : T^{-1}(L_0) / T^{-1}(L) \to L_0/L.$$

□

Continuons avec la preuve de la proposition A.2.10. On veut montrer que la fonction caractéristique d'un ensemble de la forme (c) peut s'écrire comme une combinaison linéaire des translatés par G' des fonctions caractéristiques des ensembles de la forme $T + \mathrm{Hom}(L', L)$ avec $L' \subset L_0'$ un réseau et $T \in \mathrm{Hom}(L', L_0)$. On a deux cas :

Premier cas $L \subset L_0\varpi$.

Lemme. *Sous cette hypothèse*

$$\theta + \Lambda_n = T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L).$$

Démonstration. Soit $T' \in T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(T^{-1}\left(L_0\right) \cap V_1', L\right)$. Il suffit de voir que, quand $L \subset L_0\varpi$, T' et T sont alors dans la même J_L orbite. Mais quand $L \subset L_0\varpi$, les réductions

$$\begin{aligned}\overline{T} &: T^{-1}\left(L_0\right)/T^{-1}\left(L_0\right)\varpi \rightarrow L_0/L_0\varpi,\\ \overline{T'} &: T^{-1}\left(L_0\right)/T^{-1}\left(L_0\right)\varpi \rightarrow L_0/L_0\varpi,\end{aligned}$$

coïncident ce qui montre, comme dans la preuve du lemme A.2.9, que T' et T sont dans la même J_L orbite. $\square$

Ceci achève la preuve de la proposition dans ce cas.

Deuxième cas $L \not\subseteq L_0\varpi$.

On utilise alors à nouveau le théorème A.1.3 pour trouver une décomposition

$$V_1' = V_2' \oplus V_3'$$

telle que

$$\begin{aligned}&T^{-1}\left(L_0\right) \cap V_1' = T^{-1}\left(L_0\right) \cap V_2' \oplus T^{-1}\left(L_0\right) \cap V_3'\\ &T^{-1}\left(L\right) \cap V_1' = T^{-1}\left(L\right) \cap V_2' \oplus T^{-1}\left(L\right) \cap V_3'\\ &T^{-1}\left(L_0\right) \cap V_3' = T^{-1}\left(L\right) \cap V_3'\\ &T^{-1}\left(L_0\right) \cap V_2' \subset \left(T^{-1}\left(L\right) \cap V_2'\right)\varpi.\end{aligned}$$

Avec cette décomposition $\theta + \Lambda_n$ devient l'ensemble des $T' \in X$ satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1. $T'|_{T^{-1}(0)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(T^{-1}(0) \cap A, L\right)$,
2. $T'|_{V_2'} \in T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(V_2' \cap A, L\right)$, d'après le lemme précédent
3. $T'^{-1}\left(L_0\right) \cap V_3' = T'^{-1}\left(L\right) \cap V_3' = A \cap V_3'$.

Notons $T_1' = T'|_{T^{-1}(0)} \in \mathrm{Hom}_D\left(T^{-1}(0), V\right)$, $T_2' = T'|_{V_2'} \in \mathrm{Hom}_D\left(V_2', V\right)$, $T_3' = T'|_{V_3'} \in \mathrm{Hom}_D\left(V_3', V\right)$.

La fonction $T' = T_1' \oplus T_2' \oplus T_3'$. Puisque T_1' et T_2' sont des ensembles comme ceux de l'énoncé de la proposition, il ne nous reste à prouver que l'on peut aussi exprimer la fonction caractéristique de l'ensemble T_3' comme une combinaison linéaire des translatés par G' des fonctions caractéristiques des ensembles de cette forme. En effet, si

$$T_3' \in T + \sum_{L' \subset L_0'} \mathrm{Hom}(L', L),$$

on aurait que,

$$T' \in T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(T^{-1}(0) \cap A, L\right) + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(V_2' \cap A, L\right) + \sum_{L' \subset L_0'} \mathrm{Hom}(L', L).$$

et donc

$$T' \in T + \sum_{L' \subset L'_0} \mathrm{Hom}(L', L).$$

Ainsi, on peut se ramener au cas où $V' = V'_3$, c'est-à-dire, on veut montrer que la fonction caractéristique de l'ensemble

$$C = \left\{ T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L) : \overline{T} : A/A\varpi \to L_0/L_0\varpi \text{ soit injective} \right\},$$

est une combinaison linéaire des fonction du type de l'énoncé de la proposition.

Soit $B \subset V'$ un réseau tel que $\varpi A \subset B \subset A$. Alors $B/\varpi A$ est un sous-espace de $A/A\varpi$. Pour tout $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L)$, il est clair que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0\varpi)$ si, et seulement si $B/A\varpi \subset \ker \overline{T}$.

Par la même procédure que dans la démonstration des théorèmes A.2.3 et A.2.4, on trouve que la fonction caractéristique de C peut être écrite comme la somme des fonctions caractéristiques des ensembles

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0\varpi), \tag{d}$$

avec des B tels que $A\varpi \subset B \subset A$.

Il nous reste donc a montrer que les fonctions caractéristiques de tels ensembles (d) peuvent être écrites sous la forme de l'énoncé de la proposition. Remarquons que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0\varpi) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(B\varpi^{-1}, L_0\right).$$

Puisque $L \subset L_0$ on a aussi

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(B\varpi^{-1}, L\right) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(B\varpi^{-1}, L_0\right)$$

et puisque $A \subset B\varpi^{-1}$, on a aussi

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(B\varpi^{-1}, L\right) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(B\varpi^{-1}, L\right) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, L_0\varpi) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(B\varpi^{-1}, L_0\right).$$

La première inclusion implique qu'un réseau de la forme (d) est une union disjointe des ensembles de la forme $T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B\varpi^{-1}, L)$ et la deuxième inclusion nous dit que de plus $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B\varpi^{-1}, L_0)$ et donc ces ensembles sont de la forme spécifiée dans l'énoncé de la proposition ce qui achève sa preuve. □

A.2.11. Posons pour simplifier les notations $S = S_R(X)$. Pour trouver l'énoncé d'un théorème similaire aux théorèmes A.2.3 et A.2.4 pour les J_L il faut tenir compte de deux faits :

1. Si $L_2 \subset L_1$ alors $J_{L_2} \subset J_{L_1}$ et donc $S^{J_{L_1}} \subset S^{J_{L_2}}$.
2. Quand J_{L_2} est très petit, le module $S^{J_{L_2}}$ devient très compliqué parce qu'il y a trop de redondance : en effet, le G-module engendré par les J_{L_2}-invariants contient des J_{L_1}-invariants que l'on connaît déjà.

L'espace S^{J_L} est un $G' \times \mathcal{H}_R(G, J_L)$-module. Notons ${}^0S^{J_L}$ le sous-$\mathcal{H}_R(G, J_L)$-module de S^{J_L} engendré par les sous-espaces $S^{J_{L_1}}$ avec $L \subsetneq L_1 \subset L_0$. L'espace ${}^0S^{J_L}$ est aussi un $G' \times \mathcal{H}_R(G, J_L)$-module et on pose

$$\mathcal{F}(X; L) = S^{J_L} / {}^0S^{J_L}.$$

Remarquons, d'un autre côté, que, si L' est un réseau quelconque dans V' et $T \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L_0)$, $T + \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L)$ est invariant par J_L. En effet, si $j \in J_L$, on a

$$j(T + \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L)) = T + (j-1)T + \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L) = T + \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L),$$

car $(j-1)T \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L)$.

Théorème. *Soit $T_0 \in X$ tel que $T_0(L'_0) \subset L_0$ et*

$$T_0(L'_0) + L = L_0, \tag{a}$$

et soit B' est un réseau quelconque de V'. L'espace $\mathcal{F}(X; L)$ est un G'-module cyclique de générateur la fonction caractéristique de $T_0 + \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(B', L)$.

Remarque. Quand $L = L_0$ et $T_0 = 0$, on retrouve le théorème A.2.4.

Démonstration. Soit $A \subset V'$ un réseau quelconque et $T \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L_0)$. Pour prouver le théorème il suffit, d'après la proposition A.2.10, de montrer deux choses :

1. Si $T(A) + L = L_0$, alors il existe $g' \in G'$ tel que $(T_0 + \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(B', L))\, g' = T + \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L)$
2. Si $T(A) + L \neq L_0$, alors il existe $g \in G$ tel que $g(T + \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L))$ soit invariant par J_{L_1} avec $L \subsetneq L_1 \subset L_0$.

Prouvons d'abord 2. Soit $g \in G$ tel que $g(L + T(A)) = L_0$ (*cf.* A.1.5). Puisque on peut voir $(L + T(A))/L$ comme un sous-module et un quotient de L_0/L, on peut s'arranger pour que $g(L) \supset L$.

Or, $g\,(T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L)) = gT + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, g\,(L))$ et puisque

$$\#\,(g\,(L)\,/L) = \#\,(L_0/\,(L + T\,(A))) > 1,$$

on voit que $g\,(L) \supsetneq L$ et $gT + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, g\,(L))$ est invariant par $J_{g(L)}$ ce qui achève la démonstration de 2.

Pour montrer 1 prenons une $\mathcal{O}$-base $y_1, \ldots, y_m$ de L_0 tel que $a_{i+1} \leq a_i$, $\{\varpi^{a_i} y_i\}_{i=1,\ldots,m}$ soit une base de L avec $a_i > 0$ pour $i \leq i_0$ et $a_i = 0$ si $i > i_0$ (*cf.* A.1.3).

Si $T\,(A) + L = L_0$, alors pour chaque $i \leq i_0$ on peut trouver $x_i \in A$ tel que $T\,(x_i) = y_i + l_i$ avec $l_i \in L$.

Puisque les réductions des y_i pour $i \leq m$ forment une base de $L_0/\,(L + L_0\varpi)$, les réduites x_i forment une base de $A/\,((T^{-1}(L) \cap A) + A\varpi)$. On peut donc prolonger les x_i en une base $x_1, \ldots, x_{i_0}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n$ de A telle que pour $i > i_0$ $x_i \in T^{-1}\,(L)$. C'est alors clair que, si l'on pose

$$\widetilde{T}\,(x_i) = \begin{cases} y_i & i \leq i_0, \\ 0 & i > i_0, \end{cases}$$

on a que $\widetilde{T} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L_0)$ et $T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L) = \widetilde{T} + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L)$.

De cette égalité on conclut que G' agit transitivement sur les ensembles de la forme

$$T + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, L) \text{ avec } T(A) + L = L_0.$$

En effet si $T_1 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A_1, L)$ et $T_2 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A_2, L)$ sont deux tels ensembles et $\{x_{i,1}\}$ et $\{x_{i,2}\}$ sont les bases de A_1 et A_2 construites ci-dessus, l'élément $g' \in G'$ qui envoie $x_{i,1}$ vers $x_{i,2}$, envoie $T_1 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A_1, L)$ vers $T_2 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A_2, L)$. Ceci achève la démonstration du théorème A.2.11.

□

A.2.12. Si l'on veut récrire le théorème en termes du théorème A.2.4, posons

$$L' = T_0^{-1}\,(L) \cap L_0'. \tag{a}$$

L'équation A.2.11(a) équivaut simplement au fait que T_0 induit un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules de L_0'/L' en L_0/L. En particulier, on a

$$[L_0, L] = [L_0', L']\,. \tag{b}$$

Notons

$$f_{L,L'} = \mathbf{1}_{T_0 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L)} \tag{c}$$

la fonction caractéristique de $T_0 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\,(L', L)$.

Le théorème A.2.11, pour $B' = L'$, devient alors :

Théorème. *Soient $T_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L'_0, L_0)$ et $L \subset L_0$ tel que*

$$T_0(L') \subset L$$

et T_0 induise un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules

$$L'_0/L' \simeq L_0/L.$$

(ce qui équivaut à $T_0(L'_0) + L = L_0$.) Alors le morphisme naturel

$$\begin{array}{rlcl} e_{L,L'}: & \mathcal{H}_R(G') & \to & \mathcal{F}(X; L) \\ & \phi & \longmapsto & \sigma(\phi) f_{L,L'} \end{array}$$

où $f_{L,L'} = \mathbf{1}_{T_0 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L)}$, est surjectif.

Démonstration. En effet, la condition

$$L'_0/L' \simeq L_0/L.$$

équivaut à $T_0(L'_0) + L = L_0$. □

A.2.13. Fixons maintenant L, T_0 et L' satisfaisant aux conditions du théorème précédent et notons $J'_{L'}$ le sous-groupe de K'_0 donné par

$$J'_{L',L'_0} = J'_{L'} \quad = \{g' \in K'_0 : (g'-1)L'_0 \subset L'\} \subset K'_0,$$

$f_{L,L'}$ est $J'_{L'}$-invariant ; notons aussi $\mathcal{F}(X; L')$ le $\mathcal{H}_R(G', J'_{L'}) \times G$-module défini de façon naturelle. Les calculs dans la preuve du théorème A.2.11 étant symétriques en G et G', il est évident que le théorème A.2.12 pour L' s'écrit :

Théorème. *Soit $T_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L'_0, L_0)$ tel que, si l'on pose*

$$L = T_0(L'),$$

T_0 induise un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules

$$L'_0/L' \simeq L_0/L.$$

Alors le morphisme naturel

$$\begin{array}{rlcl} e_{L,L'}: & \mathcal{H}_R(G) & \to & \mathcal{F}(X; L') \\ & \phi & \longmapsto & \sigma(\phi) f_{L,L'} \end{array}$$

où $f_{L,L'} = \mathbf{1}_{T_0 + \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L', L)}$, est surjectif.

A.3 Démonstration du théorème de Howe

A.3.1. Supposons $\underline{l \text{ banal}}$. Soit (π, W) une R-représentation irréductible de G.

Théorème. *Si (π', W') est une représentation irréductible de G' tel que $W \otimes W'$ soit un quotient de σ. Alors (π', W') est unique à isomorphisme près et, on a de plus*

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{G\times G'}(\sigma, W \otimes W')\right) = 1.$$

Si l'on suppose $\dim V \leq \dim V'$, l'existence d'une telle représentation (π', W') est donnée par les arguments de la section 5.7.

A.3.2. Pour l'unicité on a encore besoin d'un dernier lemme.

Lemme. *Soient $(\pi_1, W_1), (\pi_2, W_2)$ deux R-représentations admissibles non nulles de G et G' telles qu'il existe $p : S_R(X) \to W_1 \otimes W_2$ surjectif. Soit $L \subset L_0$ un réseau tel que $W_1^{J_L} \neq \{0\}$ et $[L_0 : L]$ soit minimal. Soit $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_0', L_0)$ satisfaisant à A.2.12*(a) *et posons L' définie par A.2.12*(a)*. Alors $W_2^{J'_{L'}} \neq \{0\}$ et il existe $e \in W_1^{J_L} \otimes W_2^{J'_{L'}}$ tel que*

$$W_1^{J_L} \otimes W_2^{J'_{L'}} = \mathcal{H}_R(G, J_L)\, e = \mathcal{H}_R(G', J'_{L'})\, e.$$

Démonstration. Puisque l est banal (c'est ici et juste ici où on utilise l'hypothèse de banalité) J_L et $J'_{L'}$ sont de pro-ordre inversible dans R. Ainsi p induit un morphisme surjectif de $\mathcal{H}_R(G, J_L) \times G'$-modules

$$S^{J_L} \to W_1^{J_L} \otimes W_2 = (W_1 \otimes W_2)^{J_L}.$$

D'après la maximalité de L, si $x \in S^{J_{L_2}}$ avec $L \subsetneq L_2 \subset L_0$ on a que $p(x) = 0$ et donc p passe au quotient, donnant un morphisme surjectif $\mathcal{H}_R(G, J_L) \times G'$-modules :

$$\overline{p} : \mathcal{F}(X; L) \to (W_1 \otimes W_2)^{J_L}.$$

Ainsi $(W_1 \otimes W_2)^{J_L}$ contient $\overline{p}(f_L)$, un vecteur $J_L \times J'_{L'}$-invariant, d'où $W_2^{J'_{L'}} \neq \{0\}$.

Le morphisme de $G \times \mathcal{H}_R(G', J'_{L'})$-modules

$$p' : S^{J'_{L'}} \to (W_1 \otimes W_2)^{J'_{L'}}$$

est donc non nul et surjectif.

Montrons que ${}^0S^{J'_{L'}}$ appartient au noyau de p'. En effet, s'il existe $x \in S^{J'_{L'_2}}$ avec $L' \subsetneq L_2' \subset L_0'$ avec $p'(x) \neq 0$ et $[L_0', L_2']$ minimal, alors on aurait un morphisme de $G \times \mathcal{H}_R\left(G', J'_{L'_2}\right)$-modules non nul $p_2' : \mathcal{F}(X; L_2') \to (W_1 \otimes W_2)^{J'_{L'_2}}$

et donc $f_{L'_2} \in (W_1 \otimes W_2)^{J'_{L'_2}}$ un vecteur J_{L_2} invariant où $L_2 \subset L_0$ est un réseau, qui vérifie, par A.2.11(b),

$$[L_0, L_2] = [L'_0, L'_2] < [L'_0, L'] = [L_0, L]$$

ce qui est absurde par hypothèse.

Ainsi p' passe au quotient et donne un morphisme surjectif non nul de $G \times \mathcal{H}_R(G', J'_{L'})$-modules :

$$\overline{p'} : \mathcal{F}(X; L') \to (W_1 \otimes W_2)^{J'_{L'}} .$$

En prenant les $J'_{L'}$-vecteurs fixes (resp. les J_L-vecteurs fixes) $\overline{p}$ (resp. $\overline{p'}$) induit un morphisme surjectif de $\mathcal{H}_R(G', J'_{L'})$-modules (resp. $\mathcal{H}_R(G, J_L)$-modules) :

$$\begin{array}{rl} & \overline{p} : \mathcal{F}(X; L)^{J'_{L'}} \to (W_1 \otimes W_2)^{J_L J'_{L'}} \\ (\text{resp} & \overline{p'} : \mathcal{F}(X; L')^{J_L} \to (W_1 \otimes W_2)^{J'_{L'} J_L} \ ). \end{array}$$

On rappelle (*cf.* 2.1.13) que, si K et de pro-ordre inversible dans R alors le foncteur $V \mapsto V^K$ envoie tout G-module cyclique en un $\mathcal{H}_R(G, K)$-module cyclique.

Ainsi $\mathcal{F}(X; L)^{J'_{L'}}$ est un $\mathcal{H}_R(G', J'_{L'})$-module cyclique et $\mathcal{F}(X; L')^{J_L}$ est un $\mathcal{H}_R(G, J_L)$-module cyclique, les deux engendrés par la fonction $f_{L,L'}$.

Puisque $\overline{p}$ (resp. $\overline{p'}$ est surjectif, on conclut que $(W_1 \otimes W_2)^{J_L J'_{L'}}$ est un $\mathcal{H}_R(G', J'_{L'})$-module cyclique et un $\mathcal{H}_R(G, J_L)$-module cyclique engendré par $p(f_{L,L'})$. □

A.3.3. Le reste de la démonstration du théorème A.3.1 est juste une adaptation du paragraphe 5.I.9 de [MVW]. En effet, fixons $L \subset L_0$ un réseau tel que $W^{J_L} \neq \{0\}$ et $[L_0 : L]$ soit minimal, et supposons qu'il existe deux représentations irréductibles W'_1 et W'_2 de G' telles que

$$\mathrm{Hom}(\sigma, W \otimes W'_i) \neq 0,$$

pour $i = 1, 2$.

Posons $W'_0 = W'_1 \oplus W'_2$, et notons p la projection

$$p : S_R(X) \to W \otimes W'_0.$$

En particulier on a des projections

$$p_1 : S_R(X) \to W \otimes W'_1, \quad p_2 : S_R(X) \to W \otimes W'_2$$

et ${W_1'}^{J'_{L'}} \neq \{0\} \neq {W_2'}^{J'_{L'}}$ d'après le lemme précedent. On a

$$W^{J_L} \otimes {W_0'}^{J'_{L'}} = W^{J_L} \otimes {W_1'}^{J'_{L'}} \oplus W^{J_L} \otimes {W_2'}^{J'_{L'}}.$$

Soit P la projection sur le premier facteur. Alors P commute à l'action de $S_R(G')$.

Lemme. *Soit E un R-espace vectoriel, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-algèbres de $End_R(E)$, et $e \in E$. Supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ commutent et que $E = \mathcal{A}e = \mathcal{B}e$. Alors $\mathcal{A}$ est le commutant de $\mathcal{B}$ dans $End_R(E)$, et vice-versa.*

Démonstration. Soit g dans le commutant de $\mathcal{B}$ dans $End_R(E)$. Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $ae = ge$. Alors $gbe = bge = bae = abe$ pour tout $b \in \mathcal{B}$ et donc $a = g$. □

D'après ce lemme et le lemme A.3.2, avec $\mathcal{A} = \mathcal{H}_R(G, J_L)$, $\mathcal{B} = \mathcal{H}_R(G', J'_{L'})$ $E = W^{J_L} \otimes {W_0'}^{J'_{L'}}$ et $e = p(f_L)$, on trouve qu'il existe $\phi \in \mathcal{H}_R(G, J_L)$ tel que $P = \pi_1(\phi)$. Alors $P\left(W^{J_L} \otimes {W_0'}^{J'_{L'}}\right) = \left(\pi_1(\phi) W^{J_L}\right) \otimes {W_0'}^{J'_{L'}}$ ne peut pas être égal à $W^{J_L} \otimes {W_1'}^{J'_{L'}}$. Contradiction, qui achève la démonstration du théorème.

A.3.4. Finissons cet appendice par quelques remarques importantes :

Remarque. Supposons toujours $n = \dim V \leq \dim V' = m$ et soit π une représentation irréductible de G. Soit J_L le plus grand sous-groupe compact de G_n tel que π ait des vecteurs J_L-invariants et supposons que J_L ait un pro-ordre inversible dans R. Supposons aussi que $J'_{L'}$ ait un pro-ordre inversible dans R. Alors, il existe une unique représentation irréductible π' de G_m telle que

$$\mathrm{Hom}(\sigma, \pi \otimes \pi') \neq 0$$

et, dans ce cas,

$$\dim(\mathrm{Hom}(\sigma, \pi \otimes \pi')) = 1.$$

En effet, dans la preuve précédente, on n'a utilisé l'hypothèse de banalité que pour s'assurer que J_L et $J'_{L'}$ soient de pro-ordre inversible dans R.

Remarque. Si $\mathrm{Hom}(\sigma, \pi \otimes \pi') \neq 0$, et J_L est le plus grand sous-groupe compact de G_n tel que π ait des vecteurs J_L-invariants. Alors, si L' est défini par A.2.12(a), $J'_{L'}$ est le plus grand sous-groupe compact de G_m tel que π' ait des vecteurs $J'_{L'}$-invariants. Ça nous donne des informations sur le transfert du niveau par la correspondance thêta.

Bibliographie

[Au1] A.-M. Aubert, *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2179-2189 et *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1995), 4687-4690.

[Aue] A. N. Auel, *Une démonstration d'un théorème de Bernstein sur les représentations de quasi carré intégrable de $GL_n(F)$ où F est un corps local non archimédien*, Mémoire de DEA, Université Paris Sud, (2004).

[Ba] A. Badulescu, *Jacquet-Langlands et unitarisabilité*, à paraître dans Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

[Ba2] A. Badulescu, *Un résultat d'irréductibilité en caractéristique non nulle*, Tohoku Math. J. **56** (2004), 583-592.

[Ber] I.N. Bernstein, *Representations of p-adic groups*, Notes by K.E. Rumelhart, Harvard Univ. 1992.

[BD] I.N. Bernstein, *Le "centre" de Bernstein*, Edité par P. Deligne. *Representations of reductive groups over a local field* 1-32, Travaux en cours, Hermann, Paris 1984.

[BDK] I.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan *Trace Paley-Wiener Theorem for reductive p-adic groups*, J. Analyse Math. **47**, 1986, 180-192.

[BZ1] I.N. Bernstein, A.V. Zelevinskii, *Representations of the groups $GL(n, F)$ where F is a local non-archimedean Field*, Uspekhi Mat. Nauk., Vol 31, No. 3, 1976, 74-75.

[BZ2] I.N. Bernstein, A.V. Zelevinskii, *Induced Representations of Reductive p-Adic Groups I*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e serie, t. 10, 1977, 441-472.

[Bou] N. Bourbaki, *Algèbre* chapitre 8, Hermann Paris, 1958.

[BH] C.J. Bushnell, G. Henniart, *The local Langlands conjecture for $GL(2)$* à paraître.

[Cas] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, preprint.

[Dat] J.-F. Dat, *ν-tempered representations of p-adic groups : l-adic case* Duke Math. J. **126** (2005) no. 3, 397-469.

[DKV] P. Deligne, D. Kazhdan, M.-F. Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris 1984.

[Dij] G. van Dijk *Computation of certain Induced Characters of p-adic Groups* Math. Ann. **199**, (1972), 229-240.

[Ge] S. Gelbart, *On theta series liftings for unitary groups*, CRM Proceedings and Lect. Notes Vol. 1 (1993) pp. 129-174.

[GK] I.M. Gelfand, D.A. Kazhdan, *Representations of the group $GL(n, K)$ where K is a local field,*, Lie Groups and their representations, I.M. Gelfand ed., London 1975.

[GJ] R. Godement, H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lectures Notes in Math. vol. 260, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1972.

[Har] M. Harris, *Cohomological automorphic forms on unitary groups, II : Period relations and values of L-functions*, http ://www.institut.math.jussieu.fr/ harris/.

[Ho1] R. Howe, *Θ-series and invariant theory*, in Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, part 1, AMS, 1979, 275-286.

[Ho2] R. Howe, *Trascending classical invariant theory*, J. of the Amer. Math. Soc. **2** (1989), 535-552.

[Ho3] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Transactions of AMS 313, vol 2, 1989, 539-570.

[Ho4] R. Howe, *Another look at the local θ-correspondance*, Festschrift in honor of Piatetski-Shapiro, Israel Math. Conf. Proc., vol 2, 1990, 93-124.

[Ho5] R. Howe, *Affine-like Hecke algebras and p-adic representation theory*, LNM. **1804**, Springer (2002), 27-69

[Ja1] H. Jacquet, Zeta functions of simple algebras (local theory), Harmonic Analysis on Homogeneous spaces, Mem. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973,381-386.

[Ja2] H. Jacquet, *Principal L-Functions of the linear Group*, Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. **33** (1979)

[JL] H. Jacquet, R.P. Langlands *Automorphic forms on $GL(2)$* , Lect. Notes in Math., Vol. **114** (1970).

[Ku1] S. Kudla, *On the local theta correspondence*, Inv. Math. **83** (1986), 229-255.

[Ku2] S. Kudla, *Tate Thesis*, An introduction to the Langlands program, Birkhäuser Boston (2004), 109-131.

[Laz] X. Lazarus, *Module universel non ramifié pour un groupe réductif p-adique*, Thèse, Université Paris Sud, (2000).

[Lem] B. Lemaire *Intégrabilité locale des caractères tordus de $GL_n(D)$,* J. Reine Angew. Math. **566** (2004), 1-39.

[MVW] C. Moeglin, M.F. Vignéras, J.L. Waldspurger, *Correspondance de Howe sur un corps p-adique*, LNM 1291, Springer-Verlag, 1987.

[MW] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, *Sur l'involution de Zelevinskii,* J. Reine Angew. Math. **372** (1986), 136-177.

[Mu1] G. Muic, *Howe correspondence for discrete series representations ; the case of $(Sp(n), O(V))$,* J. Reine Angew. Math. **567** (2004), 99-150.

[Mu2] G. Muic, *Theta lifts of tempered representations for dual pairs $(Sp(2n), O(V))$,* Canad. J. Math. (à paraître)

[Pan] S.-Y. Pan, *Local theta correspondence for small unitary groups,* Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 4, 1511-1535.

[Pra] D. Prasad, *Weil Representations, Howe duality and theta correspondence*, CRM Proceedings and Lect. Notes Vol. 1 (1993) pp. 105-127.

[Rod] F. Rodier, *Représentations de $GL(n, k)$ où k est un corps p-adique*, Séminaire Bourbaki no 587 (1982), Asterisque **92-93**, 201-218.

[Se1] V. Sécherre, *Représentations lisses de $GL(m, D)$, I : caractères simples*, Bull. Soc. Math. France **132** (2004) (3), pp. 327-396.

[Se2] V. Sécherre, *Représentations lisses de $GL(m, D)$, II : bêta extensions*, Compos. Math. **141** (2005), pp. 1531-1550.

[Se3] V. Sécherre, *Représentations lisses de $GL(m, D)$, III : types simples*, à paraître aux Ann. Sci. École Norm. Sup.

[Tad] M. Tadić *Induced representations of $GL(n, A)$ for p-adic division algebras* J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 48-77.

[Tat] J.Tate, *Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta functions*, Doctoral Disertation, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1950 ; reprinted in Algebraic numbert theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965). Thmpson, Washington, D.C., 1967, 305-347, MR **36** # 121.

[Vi1] M.F. Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Birkhäuser, 1996.

[Vi2] M.F. Vignéras, *Induced R-representations of p-adic reductive groups*, Sel. math., New ser. **4**, 1998, 549-623.

[Vi3] M.F. Vignéras, *Banal Characteristic for reductive p-adic groups*, Journal of Number Theory **47**, 1994, 378-397.

[Vi4] M.F. Vignéras, *Cohomology of sheaves on the building and R-representations*, Invent. Math. **127**, 1997, no. 2, 349-373.

[Vi5] M.F. Vignéras, *Représentations de* $GL(2,F)$ *en caractéristique l, F corps p-adique,*$p \neq l$, Compos. Math. **72**, 1989, 33-66.

[Wal] J.L. Waldspurger, *Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique,* $p \neq 2$, in : Festschrift in honor of Piatetski-Shapiro, Israel Math. Conf. Proc., vol 2, 1990, 267-324.

[We1] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, 1967.

[We2] A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta. Math. **111** (1964), 143-211.

[We3] A. Weil, *Fonction zêta et distributions*, Sém. Bourb. **312** (1966).

[Ze1] A.V. Zelevinskii, *Induced Representations of Reductive p-Adic Groups II*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e serie, t. 13, 1980, 165-210.

[Ze2] A.V. Zelevinskii, *p-adic analogue of the Kazhdan-Lusztig conjecture*, Funct. Anal. Appl. **15**, (1981) 83-92.